Université Paris1- UFR 02 Sciences Economiques

- Master Economie Théorique et Empirique –

Master 2 Recherche spécialité microéconomie

Fourniture de biens publics en présence de préférences altruistes

Une approche redistributive avec sélection adverse

Stéphane Gauthier

Présenté et soutenu par : Tidiane LY- 2014

Résumé

Cette étude porte un nouvel éclairage sur la fourniture d'un bien par une autorité publique à des agents ayant des préférences altruistes. Elle repose sur une généralisation du modèle de Besley et Coate (2002). Il y est montré que lorsque le niveau d'altruisme relatif est une information privée des agents, une interprétation de ce paramètre plus précise que celle qui en est communément faite doit être effectuée. L'altruisme relatif mesure la manière dont un agent perçoit sa situation relativement à celle d'autrui. Ainsi, afin de pallier son manque d'information, le gouvernement doit favoriser d'autant plus un agent qu'il a un niveau d'altruisme éloigné du niveau moyen. Il est également montré que lorsque le régulateur n'observe pas le type des agents, il est contraint à un arbitrage entre équité et efficacité. Sa règle de provision optimale doit donc tenir compte non seulement des préférences des agents mais également des inégalités que cette politique peut générer.

- *Fait suite à l'Annexe de cette étude un résumé plus développé du présent travail de recherche* -

1. Introduction

La présente étude s'inscrit dans la continuité des travaux d'économie publique traitant de la fourniture d'un bien par une autorité, à l'instar d'un gouvernement, à des individus ayant des *préférences altruistes*. On se place dans une économie contenant un nombre fini d'individus. Ces derniers ont des préférences dites altruistes. C'est-à-dire que, outre leur propre consommation, celle des autres agents leur apporte également de la satisfaction. Un individu partage plus ou moins la satisfaction qu'autrui tire de sa consommation en fonction de son degré d'altruisme. En d'autres termes, l'altruisme est un facteur de pondération de la satisfaction d'autrui dans l'utilité d'un agent. Le gouvernement, quant à lui, fournit des quantités différentes d'un bien aux agents selon leur niveau d'altruisme. Afin d'assurer le financement de cette politique, il impose une taxe différenciée à chaque agent. La question qui se pose alors est de savoir comment le gouvernement, compte tenu de ses objectifs redistributifs, doit allouer les biens au sein de la population et de quelle manière il lui faut répartir les coûts entre les agents.

L'hypothèse selon laquelle le gouvernement effectuerait une discrimination entre les agents selon le critère qu'est l'altruisme peut sembler peu pertinente au premier abord. La répartition des revenus ou encore les habitudes de consommation paraissent être des critères plus appropriés. Toutefois, un exemple, entre autres[1], montre que l'altruisme n'est pas un paramètre anodin dans le choix des politiques publiques. Il s'agit du choix de fourniture de biens publics dans un contexte de fédéralisme fiscal. A la suite de Oates (1972), Besley et Coate (2003) proposent un modèle où deux villes appartenant à un même département se voient allouer par celui-ci un bien public. Le niveau de bien qu'elles reçoivent dépend de l'importance qu'elles accordent à l'autre ville. Plutôt qu'une interprétation en termes de pur altruisme, cette considération pour le sort des habitants de la ville voisine peut être interprétée comme une

[1] Un autre exemple touchant à la microéconomie des ménages, concerne les politiques de ciblage (voir Blundell, Chiappori et Meghir (2005)). Lorsque le gouvernement doit choisir quel membre du ménage cibler en matière de prestations, par exemple, l'altruisme est un facteur déterminant. Voir également Becker (1974, 1991).

mesure de la mobilité géographique. Les habitants d'une ville, ne sachant pas parfaitement où ils résideront dans l'avenir, préfèrent que l'autre ville ne soit pas excessivement désavantagée. Ainsi, la prise en compte dans le choix d'allocation du bien public de cette mobilité géographique permet au gouvernement d'anticiper les tendances démographiques à venir.

Si dans la grande majorité de la littérature sur ce domaine, l'altruisme est modélisé par un paramètre de pondération de la satisfaction d'autrui dans l'utilité individuelle, deux définitions proches mais distinctes de l'altruisme peuvent être utilisées. La première est celle d'un altruisme qui pourrait être qualifié d'*absolu*. Il s'agit d'un poids uniquement affecté à l'utilité d'autrui. Lorsque celui-ci augmente, le seul effet est d'augmenter, dans l'utilité d'un agent, l'importance de la satisfaction d'un autre[2]. Un autre procédé consiste à modéliser l'altruisme en termes *relatifs*. Dans ce dernier cas, un accroissement de ce paramètre a deux effets : il augmente le poids d'autrui mais réduit en même temps celui de l'individu considéré[3]. Bien que la plupart des auteurs emploient ces deux modélisations de manière indifférenciée, force est de remarquer qu'elles ne sont pas tout à fait équivalentes. Alors que l'*altruisme absolu* mesure bien l'effet de l'accroissement de l'utilité d'un agent sur celle d'un autre agent, *l'altruisme relatif* est, lui, plus proche d'une mesure d'une forme d'aversion à l'inégalité[4]. C'est ce second type d'altruisme qui fait l'objet de l'étude qui suit. Plus précisément, l'attention sera focalisée sur le paramètre d'*individualisme relatif* ; ce qui est équivalent.[5] Son interprétation est plus intuitive d'un point de vue économique : il mesure l'aversion à être défavorisé par rapport à autrui.

La littérature portant sur la provision publique d'un bien en présence de préférences altruistes étudie diverses questions, telles que l'alternative entre centralisation et décentralisation en ce qui concerne Besley et Coate (2003). Mais pour ce faire, elle suppose systématiquement l'altruisme comme étant un paramètre observable par le gouvernement. Bien que financièrement coûteuse, l'observabilité de la mobilité géographique paraît toutefois plausible. Mais même dans ce cas précis, il est à noter que l'importance qu'un individu accorde aux habitants d'une autre ville ne se résume pas à la seule éventualité d'un déménagement. Lorsque le niveau d'altruisme est entendu de manière plus générale, l'hypothèse d'observabilité devient rapidement très restrictive. L'apport analytique de ce papier est précisément de lever cette hypothèse en considérant le degré d'altruisme comme étant une information privée des agents. L'objectif est de caractériser la *règle de provision optimale* que doit observer le gouvernement dans un environnement de second rang où l'altruisme n'est pas observable.

C'est dans ce contexte de sélection adverse que l'interprétation traditionnelle du paramètre d'*individualisme relatif* en termes de simple pondération devient inopérante. En effet, étant donné que celui-ci mesure l'aversion à être défavorisé par rapport à autrui, l'incitation à prétendre être d'un niveau d'altruisme différent du sien propre n'est plus guidée par la seule quantité de bien reçue. Elle dépend également de la provision des autres agents. Il en résulte que le schéma des incitations diffère du cas de référence mis en lumière par Baron et Myerson (1982), ou encore Stiglitz (1982). Pour le comprendre, il est à noter que dans le cadre ici étudié, les individus les plus *efficaces* du point de vue du gouvernement sont ceux qui sont les plus individualistes. En effet, fournir une plus grande quantité de bien aux agents altruistes au détriment[6] des agents plus individualistes ne peut pas être *efficace* puisque les altruistes mettent relativement moins de poids sur eux-mêmes et relativement plus sur les individualistes. Tandis que ces derniers valorisent relativement plus leur propre consommation et relativement moins

[2] Formellement, $u_1(q_1, q_2) \equiv v_1(q_1) + \rho v_2(q_2)$ où u_i est l'utilité de l'agent i, $v_i(q_i)$ la satisfaction qu'il retire de sa consommation q_i et ρ le paramètre d'altruisme.

[3] Formellement, $u_1(q_1, q_2) = (1-\rho)v_1(q_1) + \rho v_2(q_2)$.

[4] Voir Fehr et Schmidt (1999, 2006) qui comparent ces différentes notions. Ils proposent un cadre formel permettant notamment l'étude de l'aversion à l'inégalité.

[5] Dans la note 2, il s'agit du paramètre $1-\rho$. Il sera noté $\theta \equiv 1-\rho$ dans le corps de l'étude.

[6] On rappelle que les ressources étant limitée, ce que les uns obtiennent, les autres le perdent.

celle des altruistes. Ainsi, la provision de biens sera croissante avec le niveau d'individualisme. Une déduction s'appuyant sur Baron et Myerson (1982) serait que les agents efficaces (ici, les individualistes) auraient intérêt à prétendre être inefficaces (ici, altruistes). Comme cela sera montré plus tard, ce n'est pas nécessairement le cas dans le modèle ici à l'étude. Mais pour s'en donner l'intuition, considérons un agent très altruiste. Il obtiendra donc une quantité faible de bien et sera donc fortement défavorisé par rapport à la moyenne de la société. Il ne sera donc pas imité par un agent fortement individualiste qui, par définition, à une forte aversion à être défavorisé.

Mis à part dans le cas de préférences sociales utilitaristes, lorsqu'il est amené à faire des choix de politique publique, outre la maximisation du surplus social (*objectif d'efficacité*), un gouvernement a toujours certaines préoccupations redistributives (*objectif de redistribution*). Celles-ci peuvent prendre principalement deux formes différentes. La première consiste en une pondération discrétionnaire des utilités des agents selon leur type[7]. Celle-ci convient lorsque le paramètre d'intérêt est la productivité : il est en général socialement admis et souhaitable d'accorder une importance plus grande aux agents à faible productivité. Mais concernant l'altruisme, même si moralement l'individualisme peut sembler à certains égards condamnable, d'un point de vue social, le débat n'est en rien tranché. Néanmoins, cela n'empêche pas le gouvernement de se préoccuper de la répartition sociale des bénéfices d'une politique publique. Il peut en effet souhaiter que, indépendamment du niveau d'altruisme de chacun, les bénéfices de la politique menée soient le plus équitablement répartis possible[8]. C'est cette seconde acception qui sera utilisée dans ce papier.

Dans le modèle présenté ici, comme cela est souvent le cas en matière de politique économique, l'*objectif de redistribution* du gouvernement peut entrer en contradiction avec l'*objectif d'efficacité*[9]. L'un des résultats principaux de cette étude est que lorsqu'il n'y a que deux niveaux distincts d'altruisme, équité et efficacité peuvent être conciliées. Ainsi, lorsque la distribution des agents est polarisée autour de deux niveaux d'altruisme, ce qui peut être notamment le cas dans un département contenant un nombre réduit de villes, l'optimum de premier rang est directement atteignable et il n'y a pas d'*arbitrage entre équité et efficacité.* Ce résultat est dû à la structure particulière des incitations décrite plus haut ; elle est liée à la relativité de la notion d'altruisme étudiée. Plus précisément ce résultat relève de ce que, comme le lecteur l'aura probablement anticipé, lorsque seuls deux types sont en présence, il y a nécessairement socialement un favorisé et un défavorisé. Cela n'est plus le cas lorsque le nombre de types distincts est supérieur à deux. Il est ainsi montré que dans le cas à trois types, dont on donne les outils de généralisation à $n \geq 3$ types, le gouvernement est effectivement contraint à un arbitrage entre équité et efficacité. Le cas du continuum de types, enfin, permet d'illustrer la manière dont précisément les préoccupations redistributives du gouvernement affectent la *règle de provision optimale* qu'il doit suivre.

Ce papier s'inscrit dans la continuité des articles d'économie publique traitant des politiques publiques menées en présence d'externalités dans un environnement où l'information est imparfaite. Cette voie a été ouverte par Greenwald et Stiglitz (1986) qui montrent comment une intervention fiscale peut conduire à une amélioration du bien-être au sens de Pareto dans un tel environnement. Arnott et al. (1994) ont fourni un cadre simple permettant l'étude de politiques publiques en présence d'externalités dans le modèle standard de sélection adverse avec contraintes de participation. Dans une vaste revue de littérature, Stiglitz (2002) discute ces

[7] Formellement, $\Omega \equiv \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} g(\theta)u(\theta)\, dF(\theta)$, où $g(\theta)$ est le poids affecté aux agents de type θ.

[8] Formellement, $\Omega \equiv \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \psi\big(u(\theta)\big)\, dF(\theta)$, où $\psi' > 0\ et\ \psi'' < 0$.

[9] Voir Mirrless (1971) et sa formalisation simplifiée par Diamond (1998) où les préférences sont supposées quasi-linéaire, comme c'est le cas dans le présent papier.

différents modèles. Proche également de l'étude ici proposée, un pan de la littérature existe qui traite de l'implémentabilité d'optima en présence d'interactions entre les agents. Ces travaux qui prennent pour appui les articles de référence de Jehiel et al. (1999), Jehiel et Moldovanu (2001) et Mezzetti (2004) reposent sur la théorie des enchères. Celui d'entre eux qui se rapproche le plus de l'analyse qui suit est le modèle étudié par Küçükşenel (2009). Dans un cadre proche de celui proposé ici, il étudie l'implémentabilité d'optima de premier rang en présence d'altruisme relatif interprété traditionnellement en tant que facteur de pondération. Mais la différence la plus notable avec le présent papier est que Küçükşenel considère l'altruisme comme étant un paramètre observable ; l'asymétrie informationnelle repose sur un autre paramètre. Enfin, les travaux de Fehr et Schmidt (1999, 2006), s'ils ne traitent pas explicitement d'*altruisme relatif* abordent en détail les questions d'aversion à l'inégalité.

La suite du papier est organisée comme suit. La Section 2 détaille le cadre théorique d'analyse. Les Sections 3 et 4 sont respectivement consacrées à l'étude des cas de deux et trois types d'agents. Celui d'un continuum d'agents fait l'objet de la Section 5. Enfin, la Section 6 offre quelques remarques conclusives.

2. Le modèle

On considère le jeu contractuel suivant : un gouvernement (principal) fournit une quantité q d'un bien à un agent de type θ. En contrepartie, ce dernier doit payer une taxe t.

2.1. Les agents

2.1.1. Cas discret

L'économie comprend n agents indicés par i ϵ ⟦1,n⟧. Chacun est caractérisé par son type $\theta_i \in [0, 1]$, sa préoccupation sociale, qui est une information privée. θ_i est supposé croissant en i. Il y a une proportion p_i d'agents de type θ_i : $\sum_{i=0}^{n} p_i = 1 \; et \; p_i > 0$. A chaque agent de type θ_i, le gouvernement propose un contrat

$$\big(q(\theta_i), t(\theta_i)\big) \equiv (q_i, t_i) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$$

On suppose que $q_i, t_i \; et \; \theta_i$ sont vérifiables[10] par une tierce partie – une cour de justice par exemple. Le contrat peut donc bien être appliqué grâce à un système de pénalités appropriées.

Lorsqu'il consomme $q_{i,}$ l'agent jouit d'une satisfaction monétaire $v(q_i)$. v est supposée identique pour tous les agents, croissante ($v' > 0$) et concave ($v'' < 0$). Au-delà de sa propre satisfaction, l'agent i tient compte de la satisfaction des autres.

$$\overline{v} = \sum_{j=1}^{n} p_j \, v(q_j) \qquad [1]$$

Ainsi, la satisfaction monétaire totale que l'agent i retire d'une allocation $(q_1, \dots, q_n)$ est :

$$u_i \equiv \theta_i v(q_i) + (1 - \theta_i)\, \overline{v} - t_i \quad {}^{11} \qquad [2]$$

[10] La vérifiabilité de θ_i est une hypothèse relativement discutable. Mais une étude du cas de non-vérifiabilité dépasserait le cadre de notre analyse. Le lecteur intéressé par la question se reportera à profit vers Dutta-Sen (1991) ou Moore-Repullo (1990) qui étudient l'implementabilité d'un équilibre de Nash dans le cas de 2 agents.

[11] Notons que la satisfaction d'un individu est affectée uniquement par les biens dont bénéficient les autres et non par les taxes que ceux-ci subissent. Nous suivons ainsi Besley et Coate (2002). Küçükenel (2009)

La constante $\theta_i \in [0,1]$ est une fonction de pondération spécifique à l'agent i reflétant son niveau de préoccupation sociale. Si $\theta_i = 1$, l'agent a des préférences égoïstes qui ne dépendent pas directement de celles d'autrui. On retrouve là une fonction d'utilité standard. Si $\theta_i < 1$, l'agent a des préférences altruistes. Son utilité est une fonction croissante du bien-être d'autrui. Lorsque $\theta_i = 0$, l'agent est parfaitement altruiste.

θ_i représente donc le niveau d'individualisme de l'agent. Mais pour avoir une idée plus précise de la signification de ce paramètre, notons qu'il est possible de réécrire l'utilité [2] comme suit

$$u_i = \overline{v} + \theta_i \, (\, v(q_i) - \overline{v}) - t_i \qquad [3]$$

Ainsi, si l'agent i apprécie que l'utilité sociale soit élevée, il souffre lorsque celle-ci est plus élevée que la sienne.
Le paramètre θ_i mesure ainsi l'aversion à être défavorisé par rapport à autrui. θ_i est donc bien une mesure de l'individualisme, mais d'un individualisme relatif. Cette nouvelle interprétation de θ_i joue un rôle important dans la suite de l'étude.

2.1.2. Cas d'un continuum de types

Dans la Section 5, nous considérons le cas d'un continuum de types d'agent $\theta \in [\underline{\theta}; \overline{\theta}\,]$ distribués selon la fonction de distribution f et de fonction de répartition F.
Dans ce cas, l'utilité de l'agent θ pour un menu de contrat $\big(q(.), t(.)\big)$ sera :

$$u(\theta) = \theta \, v\big(q(\theta)\big) + (1 - \theta) \, \overline{v} - t(\theta)$$

$$\text{où } \overline{v} = \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} v\big(q(\theta)\big) \, dF(\theta)$$

2.2. La chronologie du jeu

Dans toute l'étude qui suit, la chronologie des interactions entre le gouvernement G et l'agent A est représentée par la Figure 1.

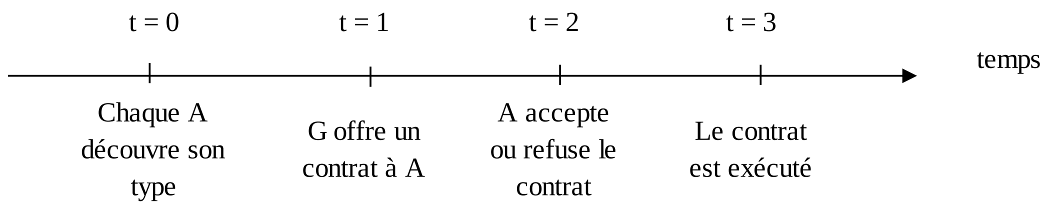


Figure 1 : Chronologie du jeu

Nous ferons l'hypothèse, peu restrictive, que lorsque gouvernement et agents jouent un jeu coopératif – ie le gouvernement maximise la satisfaction sociale – l'étape t = 2 aboutira toujours à une acceptation du contrat par l'agent. Cette hypothèse généralement admise en économie publique implique formellement la non pertinence des contraintes de participation.

2.3. Le programme du gouvernement

considère un cadre où les taxes d'autrui sont prises en compte $u_i \equiv \theta_i(v(q_i) - t_i) + (1 - \theta_i) \, (\sum_j p_j(v(q_j) - t_j))$.

Le gouvernement souhaite maximiser une mesure de l'utilité sociale. Formellement, son objectif est une fonctionnelle de Bergson-Samuelson : $W(u_{1,} \dots, u_n)$ où W est croissante et concave.
Nous retiendrons une fonction additive

$$W(u_{1,} \dots, u_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i \, \psi(u_i)$$

ψ est une fonction croissante et concave[12] qui pondère les utilités des agents en fonction d'objectifs redistributifs : la concavité de ψ implique qu'un accroissement marginal de u_i a moins de poids si u_i est déjà élevée. Le gouvernement a donc pour objectif la plus grande *équité* possible.
Suivant la chronologie précédente du jeu contractuel, le gouvernement offre un menu de contrat $(t_i, q_i)_{\, i \in [\![1, n]\!]}$ avant de savoir quel sera le type de l'agent. Il calcule donc l'utilité pondérée espérée de chaque contrat. Le programme du gouvernement s'écrit :

$$(P)\begin{cases} \max\limits_{(q_i, t_i)} \sum\limits_{i=1}^{n} p_i \, \psi \, [\theta_i v(q_i) + (1-\theta_i)\overline{v} - t_i] \\ s.c \begin{cases} \theta_i v(q_i) + (1-\theta_i)\overline{v} - t_i \; \geq \; \theta_i v(q_j) + (1-\theta_i)\overline{v} - t_j \quad (IC_{ij}) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i (t_i - q_i) \geq 0 \quad (FC) \end{cases} \end{cases}$$

(IC_{ij}) est la contrainte l'incitation du type i. Elle permet d'éviter une *déviation* de l'agent i qui opterait pour le contrat (t_j, q_j). (FC)[13] est la contrainte budgétaire du gouvernement qui doit s'assurer de pouvoir financer l'allocation $(q_1, \dots, q_n)$. En utilisant la définition de l'utilité, $u_i = \theta_i v(q_i) + (1-\theta_i)\,\overline{v} - t_i$, on peut exprimer les taxes dans (P) en fonction des quantités et utilités. Ce changement de variables sera plus propice aux interprétations économiques.
(IC_{ij}) peut ainsi s'écrire :

$$u_i \geq u_j + \Delta\theta_{ij} \left(v(q_j) - \overline{v}\right) \qquad \text{où } \Delta\theta_{ij} = \theta_i - \theta_j$$

Notons également que (FC) peut s'écrire :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \, [\, \theta_i v(q_i) + (1-\theta_i)\overline{v} - u_i - q_i] = \sum_{i=1}^{n} p_i \, [\left(1 + \theta_i - E(\theta)\right) v(q_i) - u_i - q_i]$$

On peut donc réécrire (P) :

$$(P)\begin{cases} \max\limits_{(q_i, t_i)} \sum\limits_{i=1}^{n} p_i \, \psi(u_i) \\ s.c \begin{cases} u_i \geq u_j + \Delta\theta_{ij}\left(v(q_j) - \overline{v}\right) \qquad \forall i, j \in [\![1, n]\!] \quad (IC_{ij}) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i \left[\, \left(1 + \theta_i - E(\theta)\right) v(q_i) - v_i - q_i\right] \geq 0 \qquad (FC) \end{cases} \end{cases}$$

---

[12] Dans la littérature on retient souvent la fonction $\psi(U) = \frac{U^\alpha}{\alpha}$, $\alpha < 1$. Dans les simulations $\alpha = 1$ correspond au cas utilitariste, α = -∞ correspond au cas rawlsien.
[13] Le prix du bien q est normalisé à 1.

Enfin, notons qu'en terme continu le programme (P) s'écrit :

$$(P_c)\begin{cases} \max\limits_{(q(.),u(.))} \displaystyle\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \psi\big(u(\theta)\big)\, dF(\theta) \\ s.t \begin{cases} u(\theta) \geq u(\hat{\theta}) + (\theta - \hat{\theta})\left(v\left(q(\hat{\theta})\right) - \overline{v}\right) \qquad \forall\, \theta, \hat{\theta} \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}] \quad (IC_{\theta\hat{\theta}}) \\ \displaystyle\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \left[\big(1 + \theta - E(\theta)\big)\, v\big(q(\theta)\big) - u(\theta) - q(\theta)\right] dF(\theta) \geq 0 \quad (FC) \end{cases} \end{cases}$$

Dans les Sections 3 et 4, le programme (P) sera étudié pour les cas n = 2, 3. Sera mis en évidence l'arbitrage entre équité et efficacité que doit effectuer le gouvernement. La Section 5 est consacrée au cas d'un continuum d'agents caractérisé par le programme (P_c). Elle permettra une caractérisation de la règle de provision optimale que devra suivre le gouvernement.

3. L'implémentabilité de l'optimum de premier rang : cas de deux types d'agents

3.1. Analyse de premier rang

Au premier rang, lorsque le gouvernement observe les θ_i, le programme (P) s'écrit :

$$(P)\begin{cases} \max\limits_{(q_i,t_i)} \displaystyle\sum_{i=1}^{2} p_i\, \psi(u_i) \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{2} p_i \left[\big(1 + \theta_i - E(\theta)\big)\, v(q_i) - u_i - q_i\right] \geq 0 \quad (FC) \end{cases}$$

Ce programme conduit aux résultats :

Résultat 1. *Si n = 2, au premier rang utilités, quantités et taxes sont caractérisées ainsi :*

1. $u_1^{PR} = u_2^{PR}$
2. $\frac{1}{v'(q_i^{PR})} = 1 + \theta_i - E(\theta)$
3. a. $q_1^{PR} < q_2^{PR}$ b. $t_1^{PR} < t_2^{PR}$

Preuve. Voir annexe

Afin de donner une intuition économique au Résultat 1, il faut d'abord comprendre la signification de la contrainte de réalisabilité (FC) du gouvernement. Supposons pour cela que la redistribution financière ne soit pas possible. Dans ce cas (FC) s'écrit $t_i - q_i \geq 0$ ce qui équivaut à :

$$\theta_i\, v(q_i) + (1 - \theta_i)\overline{v} - q_i \geq u_i \qquad (\mathrm{FC_i})$$

Pour une allocation (q_1, q_2) choisie par le gouvernement, $\theta_i\, \mathrm{v}(q_i) + (1 - \theta_i)\overline{v}$ représente le gain dont l'agent i jouira et q_i le coût supporté. Ainsi ($\mathrm{FC_i}$) signifie que l'utilité de l'agent i ne peut pas excéder le bénéfice net que lui permet d'atteindre l'allocation (q_1, q_2). Mais puisque l'objectif ne dépend pas de q_i, le meilleur choix que pourra faire le gouvernement sera de choisir q_i de manière à maximiser le bénéfice net, par l'égalisation du gain marginal et du coût marginal.

Si l'on revient à (FC) qui est l'agrégation pondérée des (FC_i), on constate qu'elle signifie que l'utilité moyenne ne peut pas excéder le bénéfice net moyen. Le choix optimal des q_i sera donc celui qui égalise gain et coût marginaux. C'est précisément ce que signifie la partie 2 du Résultat 1. Nous définissons donc (q_1^{PR}, q_2^{PR}) comme les *quantités efficaces*. On comprend également pourquoi $q_2^{PR} > q_1^{PR}$: l'agent 2 mettant plus de poids sur lui-même et moins sur autrui, une allocation dans laquelle il reçoit davantage apportera donc un gain marginal supérieur ; il devra donc être mieux doté.

La partie 1 du Résultat 1 révèle qu'à l'optimum, il y aura *équité* parfaite. Cela provient du caractère redistributif de l'objectif du gouvernement ($\psi'' < 0$). Ainsi, en résumé, au premier rang le gouvernement peut allier équité et efficacité : *il n'y a pas d'arbitrage équité-efficacité.*

3.2. Analyse de second rang

L'analyse de premier rang suppose que le gouvernement puisse observer le type θ_i de l'agent et donc contraindre chacun à choisir le contrat correspondant. En réalité, les types sont généralement inobservables. Dans ce cas, un agent peut avoir intérêt à dévier, c'est-à-dire prétendre être d'un type différent du sien. Cela soulève la question de l'implémentabilité du menu de contrats $\left((q_1^{PR}, t_1^{PR}), (q_2^{PR}, t_2^{PR})\right)$.

Notons u_i^j l'utilité de l'agent i s'il dévie en choisissant le contrat $\left(q_j^{PR}, t_j^{PR}\right)$. En exprimant l'utilité selon la forme [3], on a :

$$u_1^{PR} = \overline{v} + \theta_2(\, v(q_2^{PR}) - v^{PR}) - t_2^{PR}$$

$$u_1^2 = \overline{v} + \theta_1(\, v(q_2^{PR}) - v^{PR}) - t_2^{PR}$$

Où $v^{PR} = p_1\, v(q_1^{PR}) + \, p_2\, v(q_2^{PR})$

La première ligne émane du fait que $u_1^{PR} = \, u_2^{PR}$. C'est-à-dire que l'agent 1 a la même utilité que l'agent 2 choisissant (q_2^{PR}, t_2^{PR}). Puisque $q_2^{PR} > q_1^{PR}$, $v(q_2^{PR}) > \overline{v}^{PR}$.

Ainsi, $u_1^{PR} > \, u_1^2$. L'agent 1 ne dévie pas car étant moins individualiste que l'agent 2, il perdrait alors en utilité, tirant un moindre bénéfice du fait que $v(q_2^{PR}) > \, \overline{v}$, car $\theta_1 < \theta_2$. Formellement,

$$u_1^{PR} - u_1^2 = \Delta\theta_{21}\left(\, v(q_2^{PR}) - \overline{v}^{PR}\right) \, > 0$$

Concernant l'agent 2, on a :

$$u_2^{PR} = \overline{v} + \theta_1(\, v(q_1^{PR}) - v^{PR}) - t_1^{PR}$$

$$u_2^1 = \overline{v} + \theta_2(\, v(q_1^{PR}) - v^{PR}) - t_1^{PR}$$

Puisque $v(q_1^{PR}) < \overline{v}^{PR}$, on a $u_2^{PR} > \, u_2^1$, donc l'agent 2 ne dévie pas non plus. L'argument est symétrique : en déviant, l'agent 2 souffre davantage du fait que $v(q_1^{PR}) < \overline{v}^{PR}$. Formellement,

$$u_2^{PR} - u_2^1 = \Delta\theta_{12}\left(v(q_1^{PR}) - \overline{v}^{PR}\right) > 0$$

Ainsi aucun agent ne dévie de l'optimum de premier rang. Ce dernier est donc directement implémentable. Les résultats précédents sont synthétisés dans la Propriété 1.

Propriété 1. *Lorsque $n = 2$, l'optimum de premier rang est implémentable et le gouvernement n'est pas contraint à un arbitrage entre équité et efficacité.*

3.3. Représentation graphique

La Figure 2 apporte un éclairage supplémentaire sur les arguments précédemment développés. Y sont représentées les courbes d'indifférences passant par les contrats de premier rang. Se rappelant que $t_i = \theta_i \,\mathrm{v}(q_i) + (1-\theta_i)\overline{v}^{PR} - u^{PR}$[14], le lecteur vérifiera aisément que les courbes d'indifférence sont croissantes et concaves. Par ailleurs, leur pente est croissante par rapport au type θ, alors que leur ordonnée à l'origine en est une fonction décroissante.
Elles ne se croisent donc qu'une fois[15]. On note $(\bar{q}, \bar{t})$ le point d'intersection. Caractérisons $\bar{q}$. On a :

$$\bar{t} = \theta_1 \,\mathrm{v}(\bar{q}) + (1-\theta_1)\overline{v}^{PR} - u^{PR} = \theta_2 \,\mathrm{v}(\bar{q}) + (1-\theta_2)\overline{v}^{PR} - u^{PR}$$

$$\text{Donc } (\theta_2 - \theta_1)\,(v(\bar{q}) - \overline{v}^{PR}) = 0$$

$$\text{D'où } v(\bar{q}) = \overline{v}^{PR}$$

Ces éléments sont synthétisés dans la Figure 2.[16]

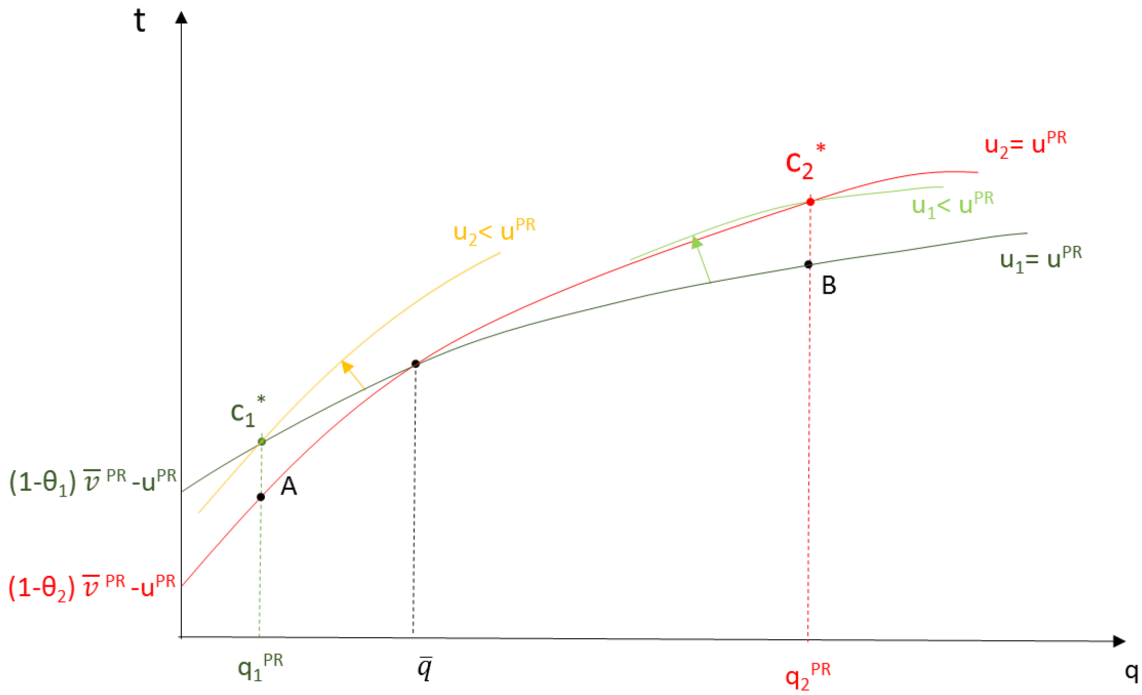


Figure 2. Contrats de premier rang, cas n = 2

C_1* et C_2* représentent les contrats de premier rang. On constate que l'agent 1 n'a pas intérêt à choisir C_2*. En effet, son utilité augmentant lorsque l'on se déplace vers le « sud-est », il lui préfère le contrat B qui lui permet de payer une moindre taxe en obtenant la même quantité. Or l'agent 1 est indifférent entre C_1* et B. Donc il préfère C_1* à C_2* par transitivité. Symétriquement, l'agent 2 préfère A à C_1* et est indifférent entre A et C_2*. Donc il ne dévie pas non plus.

---

[14] On adopte la notation $u^{PR} \equiv u_i^{PR} \quad \forall i \in \{1,2\}$. De plus, $\overline{v}^{PR}$ demeure constant car dans toute l'étude la quantité choisie par un consommateur est supposée ne pas affecter l'utilité collective.
[15] Notons donc que la condition de Spence-Mirrlees (ou *single-crossing condition*) est ici vérifiée.
[16] Par soucis de simplification, nous faisons ici l'hypothèse que v(0)=0.

Ainsi, personne n'a intérêt à dévier. Cette conclusion repose toutefois fortement sur le fait mécanique que $q_1^{PR} < \bar{q} < q_2^{PR}$, c'est-à-dire $v(q_1^{PR}) < \bar{v} < v(q_2^{PR})$. Supposons par exemple, le scénario impossible mais instructif où $\bar{q} < q_1^{PR} < q_2^{PR}$. Dans ce cas, on voit graphiquement que l'agent 2 aurait intérêt à copier l'agent 1. Ceci donne l'intuition que la Propriété 1 ne pourra pas être étendu au cas n > 2. C'est ce que nous allons étudier dans les deux Sections suivantes.

4. L'arbitrage équité-efficacité : cas de 3 types d'agents

4.1. Analyse de premier rang

Lorsque n=3, le programme *(P)* de premier rang s'écrit

$$(P)\begin{cases} \max\limits_{(q_i,t_i)} \sum\limits_{i=1}^{3} p_i\, \psi(u_i) \\ \sum\limits_{i=1}^{3} p_i \left[\left(1+\theta_i - E(\theta)\right) v(q_i) - u_i - q_i\right] \geq 0 \quad (FC) \end{cases}$$

Ce programme conduit à des résultats identiques à ceux du cas n = 2.

Résultat 2. *Si n = 3, au premier rang on a :*

1. $u_1^{PR} = u_2^{PR} = u_3^{PR}$ [4]
2. $\frac{1}{v'(q_i^{PR})} = 1 + \theta_i - E(\theta_i) \qquad i \in \{1,2,3\}$ [5]
3. $q_1^{PR} < q_2^{PR} < q_3^{PR}$ [6]

Preuve. Identique au cas n = 2.

L'interprétation de ces résultats est identique au cas n = 2.[17] Ce Résultat 2 est aisément généralisable au cas n > 3.

4.2. Déviations du premier rang

Comme cela a été évoqué dans l'analyse du cas n = 2, en présence d'asymétries d'information, l'implémentabilité du premier rang n'est plus assurée lorsque n > 2. Pour le voir, remarquons comme précédemment que :

$$u_i^{PR} = \bar{v} + \theta_j\left(v\left(q_j^{PR}\right) - v^{PR}\right) - t_j^{PR}$$

$$u_i^{j} = \bar{v} + \theta_i\left(v\left(q_j^{PR}\right) - v^{PR}\right) - t_j^{PR}$$

D'où $u_i^j - u_i^{PR} = \left(\theta_i - \theta_j\right) \left(v\left(q_j^{PR}\right) - \overline{v}^{PR}\right)$

En découle le résultat suivant.

Remarque 1. *Lorsque n > 2, les agents peuvent avoir intérêt à dévier de la situation de premier rang. Et l'agent i imite l'agent j lorsque* $\theta_j > \theta_i \;\; et \;\; v\left(q_j^{PR}\right) < \overline{v}^{PR}$

$ou \;\; \theta_j < \theta_i \;\; et \;\; v\left(q_j^{PR}\right) > \overline{v}^{PR}$

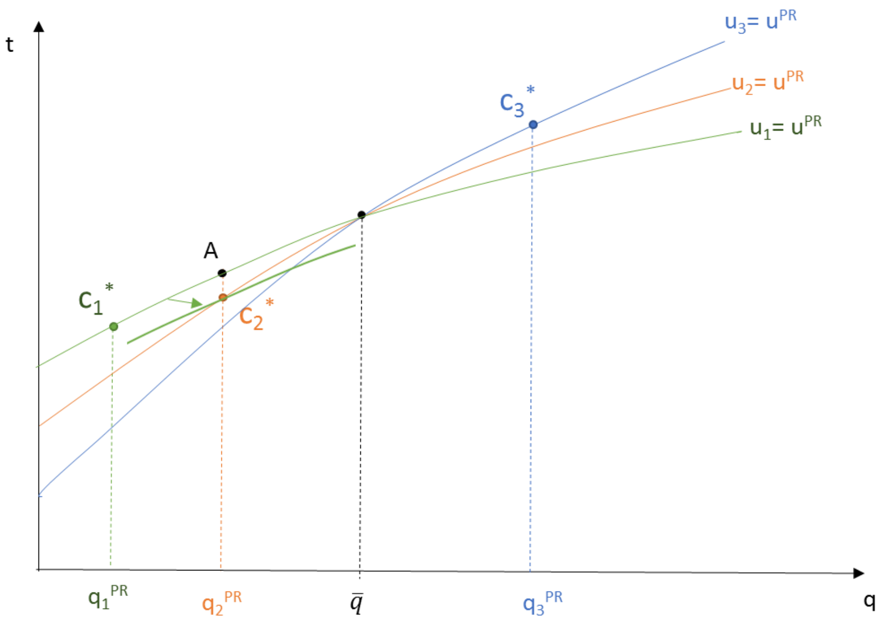
[17] Au premier rang, il n'y a pas d'arbitrage entre équité et efficacité.

L'interprétation de la Remarque 1 est la même que celle effectuée dans le cas n = 2. L'agent a intérêt à dévier lorsqu'il peut se faisant accroître sa satisfaction à avoir plus qu'autrui ou réduire son insatisfaction à avoir moins.
Dans le cas étudié ici, n = 3, puisque $q_1^{PR} < q_2^{PR} < q_3^{PR}$, seuls trois situations sont possibles :

1. $v(q_1^{PR}) < v(q_2^{PR}) = \overline{v}^{PR} < v(q_3^{PR})$: personne ne dévie[18]
2. $v(q_1^{PR}) < v(q_2^{PR}) < \overline{v}^{PR} < v(q_3^{PR})$: seul l'agent 2 est imité : par l'agent 1
3. $v(q_1^{PR}) < \overline{v}^{PR} < v(q_2^{PR}) < v(q_3^{PR})$: seul l'agent 2 est imité : par l'agent 3

On note d'abord que les deux agents qui ne se sont jamais imités sont ceux situés aux extrémités : θ_1 *et* θ_3.
Par ailleurs, si la situation 1 assure l'implémentabilité du premier rang, ce n'est pas les cas des deux dernières. Afin de comprendre ce qui se passe dans ce cas, on se concentrera dans le reste de cette Section sur la situation 2. Pour ce faire, il est possible de donner une forme fonctionnelle à $v(.)$ et déterminer une condition explicite sur la distribution et les types des agents.[19] On adoptera ici une approche différente, en constatant que la situation 2 intervient lorsque q_2^{PR} est suffisamment plus proche de q_1^{PR} que de q_3^{PR}. L'hypothèse suivante sera donc adoptée dans la suite.

Hypothèse 1. *$\theta_2 - \theta_1$ est supposé très faible par rapport à $\theta_3 - \theta_2$. C'est-à-dire,* $\Delta\theta_{21} = o(\Delta\theta_{32})$



Il est à noter que sous l'Hypothèse 1, $\Delta\theta_{21}$ est proche de zéro. La Figure 3[20] illustre la situation 2.

Figure 3. Contrats de premier rang, cas n = 3

[18] Ces trois schémas de déviations sont des applications directes du Résultat 3.
[19] Il serait également possible de trouver une condition à partir d'une formulation générale. Mais cela compliquerait grandement l'analyse au risque de perdre de vue les intuitions économiques qui sont précisément l'unique objectif de cette Section.
[20] Le lecteur pourra vérifier sans difficulté que les trois courbes d'indifférence se croisent au point $\bar{q}$ caractérisé par $v(\bar{q}) = \overline{v}^{PR}$.

Comme on peut le voir sur la Figure 3, l'agent 1 est indifférent entre C_1* et A et préfère C_2* à A. Donc préférant C_2* à C_1*, il a intérêt à dévier en prétendant être de type 2.

4.3. Analyse de second rang

N'observant pas le type des agents, comme mentionné dans les Sections 2 et 3, le gouvernement résout le problème suivant.

$$(P)\begin{cases} \max\limits_{(q_i,u_i)} \sum\limits_{i=1}^{3} p_i \ \psi(u_i) \\ s.c \begin{cases} u_i \geq u_j + \Delta\theta_{ij}\left(v(q_j) - \overline{v}\right) & \forall i,j \in [\![1,3]\!] \quad (IC_{ij}) \\ \sum\limits_{i=1}^{3} p_i\left[\left(1+\theta_i - E(\theta)\right) v(q_i) - u_i - q_i\right] \geq 0 & (FC) \end{cases} \end{cases}$$

Ce programme conduit aux résultats :

Résultat 3. *Si n = 3, sous l'hypothèse 1 on a au second rang :*

1. *Les seules contraintes pertinentes sont (FC) et (IC_{12})*
2. $u_2^{SR} < u_3^{SR} < u_1^{SR}$ [7]
3. $q_1^{SR} < q_2^{SR} < q_3^{SR}$
4. a. $\frac{1}{v\prime(q_i^{SR})} = 1 + \theta_i - E(\theta) - d(\sigma)\Delta\theta_{21}$ $\quad i \in \{1,3\}$ [8]

   b. $\frac{1}{v\prime(q_2^{SR})} = 1 + \theta_2 - E(\theta) - d(\sigma)\Delta\theta_{21} + \frac{1}{p_2}d(\sigma)\Delta\theta_{21}$ [9]

où d(.) est croissante, positive et d(1)=0 et $\sigma = \frac{\psi\prime(u_2^{SR})}{\psi\prime(u_1^{SR})} > 0$

Preuve. Voir annexe

Il est d'abord à noter que la partie 4 du Résultat 3 donne immédiatement : $q_1^{SR} < q_1^{PR}$, $q_2^{SR} > q_2^{PR}$ *et* $q_3^{SR} < q_3^{PR}$. Cela mentionné, il est à présent d'intérêt de comprendre l'intuition derrière le Résultat 3.

Comme cela a été vu précédemment, les contrats de premier rang sont caractérisés par l'imitation de l'agent 2 par l'agent 1. C'est pourquoi le gouvernement doit inciter le second à la révélation via

$$(\mathrm{IC}_{12})\ u_1 \geq u_2 + \Delta\theta_{21}(\overline{v} - v(q_2)) .$$

On rappelle brièvement que dans la situation de premier rang où tous les agents reçoivent la même utilité, l'incitation de l'agent 1 à dévier est guidée par la volonté de réduire son insatisfaction à avoir moins que la moyenne. Cette incitation est d'autant plus grande que $\Delta\theta_{21}$ et $\left(\overline{v} - v(q_2)\right)$ sont importants. Afin de désinciter l'agent 1 à dévier, le gouvernement devra renoncer à l'équité [4] en augmentant son utilité et réduisant celle de l'agent 2, d'où [7]. Mais cette inéquité est coûteuse en raison de la redistributivité de l'objectif du gouvernement ($\psi'' < 0$).

Ainsi la perte $\left(\overline{v} - v(q_2)\right)$ sera-t-elle également réduite afin de ne pas générer une inéquité excessive. Le gouvernement devra donc réduire $\overline{v}$ et augmenter $v(q_2)$, ce qui aboutira à diminuer q_1 et q_3 et augmenter q_2[21]. Cela suscite la perte du résultat d'efficacité du premier rang [5].

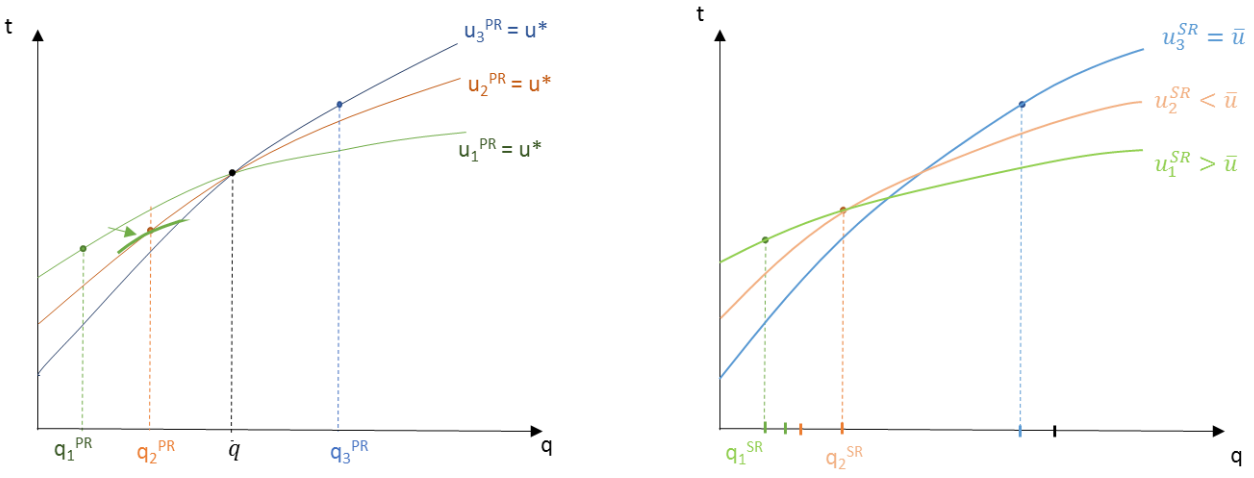
[21] Ce point est discuté en annexe dans la démonstration du Résultat 4.

A partir de l'observation des expressions [8] et [9], il est possible d'être plus précis quant à cette perte d'efficacité. On remarque en effet qu'une même distorsion $-d(\sigma)\Delta\theta_{21}$ affecte les quantités des trois agents. Celle-ci est liée à la nécessité de réduire $\overline{v}$. Le gouvernement partage cet effort de manière identique entre tous les agents. Cette contribution indifférenciée résulte de ce que la part de chaque agent dans l'utilité collective est exactement égale à son poids dans la population. C'est la raison pour laquelle, le gouvernement n'a pas intérêt à faire peser cette baisse davantage sur un type que sur un autre. Cette distorsion uniforme est liée à la présence de l'*externalité* $\overline{v}$ dans les préférences des agents.

Outre cet effet lié à l'externalité, l'expression [9] montre que l'on retrouve un résultat usuel des modèles de sélection adverse[22] : l'agent 2 qui est imité est le seul à subir une distorsion $\frac{1}{p_2}d(\sigma)\Delta\theta_{21}$ spécifique. Cela est résumé dans la proposition suivante.

Propriété 2. *Lorsque $n = 3$ au second rang, hors la distorsion liée à la l'externalité $\overline{v}$, les quantités reçues par les deux agents non imités sont inchangées par rapport au premier rang. Ces deux agents sont ceux situés aux deux extrémités de la distribution : les agents 1 et 3.*

Ainsi, le gouvernement fait donc son choix en effectuant un arbitrage entre équité et efficacité : afin d'inciter l'agent 1 à révéler son type, il a le choix entre un niveau élevé d'équité mais une forte inefficacité, ou inversement. Cet arbitrage est bien illustré par les expressions [8] et [9] qui décrivent le choix optimal des q_i et u_i. Lorsque l'agent 1 ne dévie pas, il n'y a pas besoin d'instaurer d'inégalité : $\sigma = 1$ (car $u_1^{SR} = u_2^{SR}$)[23]. Il n'y a donc pas d'inefficacité non plus (car $d(1) = 0$). Plus l'agent 1 dévie, plus le gouvernement sera contraint d'instaurer des inégalités : $\sigma > 1$ ($u_1^{SR} > u_2^{SR}$). Il sera donc de plus en plus nécessaire d'atténuer ces distorsions en renonçant à l'efficacité : $d(\sigma) > 0$. Enfin [8] et [9] montrent que pour un niveau donné d'inégalités souhaitées σ, l'inefficacité sera d'autant plus grande que l'agent 1 est incité à dévier ($\Delta\theta_{21}$ élevé). Cela n'est pas surprenant car il s'agira alors de dissuader davantage la déviation de l'agent 1.
La Figure 4 illustre le passage du premier rang (a) au second (b). [24]



a. Premier rang *b. Second rang*

Figure 4. Contrats de premier et second rang, cas $n = 3$

---

[22] Voir Baron et Myerson (1982).

[23] On a bien équité car lorsque σ tend vers 1 cela est dû au fait que $u_1^{SR} \simeq u_2^{SR}$. Or $u_2^{SR} < u_3^{SR} < u_1^{SR}$. Donc $u_2^{SR} \simeq u_3^{SR} \simeq u_1^{SR}$.

[24] On note qu'au second rang l'agent 1 est parfaitement indifférent entre son contrat et celui de l'agent 2. Formellement, cela signifie que (IC_{12}) est saturée.

La Propriété 3 résume les résultats de cette Section.

Propriété 3. *Lorsque n = 3, l'optimum de premier rang n'est plus implémentable. Dans la fixation du contrat optimal, le gouvernement est donc contraint à un arbitrage entre équité et efficacité afin d'assurer la révélation de leur vrai type par les agents.*

Les Sections 3 et 4 permettent une première conclusion. Lorsque le gouvernement fait face à une population dont les niveaux d'altruisme sont polarisés autour de deux niveaux distincts, il peut proposer deux contrats qui génèreront à la fois équité et efficacité. Mais lorsque les niveaux d'altruisme sont répartis de manière hétérogène dans la population (cas n ≥3), cela n'est plus le cas. Il doit proposer un contrat qui est la résultante d'un arbitrage entre équité et efficacité, afin d'assurer la révélation des vrais types par les agents. Cela a été montré dans le cas n=3, sous l'Hypothèse 1. La généralisation au cas $n \in \mathbb{N}^*$ sans l'Hypothèse 1 serait certes plus réalistes. Mais la résolution du modèle deviendrait très rapidement complexe. On lui préférera donc une étude dans le cas d'un continuum de types. C'est l'objet de la Section 5 qui mettra en lumière la règle de provision optimale.

5. La règle de provision optimale : le cas du continuum d'agents

Afin de caractériser la règle de provision optimale que doit observer le gouvernement afin d'articuler au mieux les enjeux de redistribution, d'efficacité et d'incitation, on se place dans cette Section dans le cas continuum de type : $\theta \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$.

5.1. Analyse de premier rang

Au premier rang, comme cela a été précisé dans la Section 2.3. le programme (P) s'écrit :

$$(P_c)\begin{cases} \max\limits_{(q(.),u(.))} \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \psi\big(u(\theta)\big)\, dF(\theta) \\ s.c \quad \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \big[\big(1+\theta-E(\theta)\big)\, v\big(q(\theta)\big) - u(\theta) - q(\theta)\big]\, dF(\theta) \geq 0 \quad (FC) \end{cases}$$

Il en résulte les résultats suivants.

Résultat 4. *Si* $\theta \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$*, au premier rang, on a :*

1. $u^{PR}(.)$ *est constante sur* $[\underline{\theta}, \overline{\theta}]$
2. $\frac{1}{v'(q^{PR}(\theta))} = 1 + \theta - E(\theta) \quad \theta \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$
3. $q^{PR}(.)$ *est croissante sur* $[\underline{\theta}, \overline{\theta}]$

Preuve. Voir annexe

Il s'agit d'une généralisation directe des Résultats 1. et 2. qui s'interprète de manière identique. Il y a donc à la fois équité et efficacité. L'objet de cette Section n'est toutefois pas de se pencher de nouveau sur cet arbitrage, mais d'étudier la règle de fixation des *q(θ)*. Au premier rang, elle est caractérisée par la seule efficacité : ni la distribution des types, ni les enjeux redistributifs n'interviennent.

5.2. Déviation du premier rang

De même que dans le cas n = 3, l'introduction d'asymétries informationnelles rend l'implémentabilité du menu de contrats de premier rang caduc. On observe par le même raisonnement que dans la Section 4, en notant l'utilité de l'agent $u_{\hat{\theta}}(\theta)$ lorsqu'il prétend être de type $\hat{\theta}$, que :

$$u_{\hat{\theta}}(\theta) - u^{PR}(\theta) = \left(\theta - \hat{\theta}\right)\left(v\left(q^{PR}(\hat{\theta})\right) - \overline{v}^{PR}\right) \qquad [10]$$

Il en résulte la généralisation de la Remarque 1 suivante.

Remarque 2. *Lorsque* $\theta \in \left[\underline{\theta}, \overline{\theta}\right]$, *les agents peuvent avoir intérêt à dévier de la situation de premier rang. Et on a : l'agent* θ *imite l'agent* $\hat{\theta}$ *lorsque* $\hat{\theta} > \theta$ *et* $v\left(q^{PR}(\hat{\theta})\right) < \overline{v}^{PR}$ *ou* $\hat{\theta} < \theta$ *et* $v\left(q^{PR}(\hat{\theta})\right) > \overline{v}^{PR}$

La Figure 5 illustre le schéma de déviation à l'œuvre.

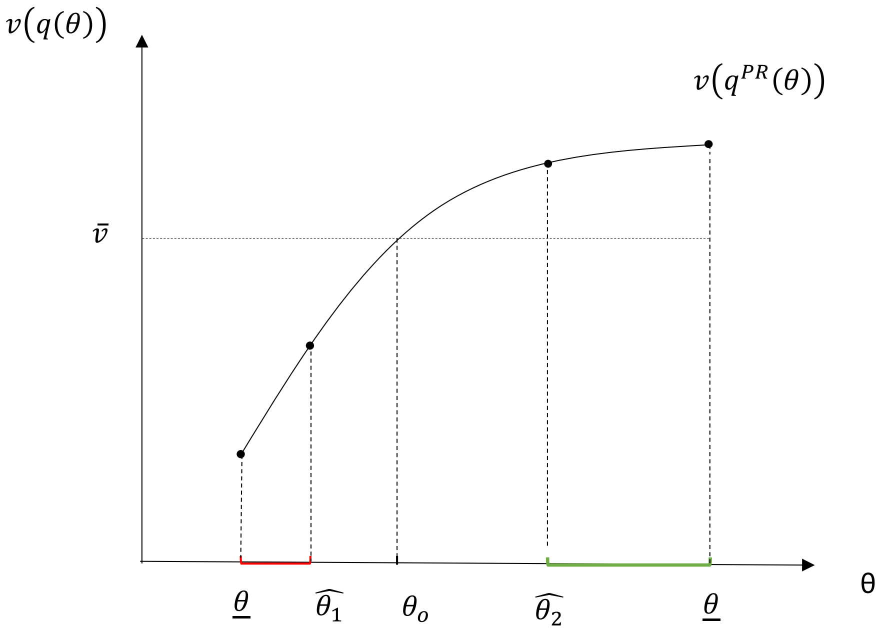


Figure 5. Schéma de déviation, cas du continuum de types

La Figure 5 illustre les deux régimes possibles selon que l'agent θ soit plus ou moins altruiste que θ_0. Par exemple, tous les agents situés sur le tronçon vert (resp. rouge) imitent $\widehat{\theta_1}$ (resp. $\widehat{\theta_2}$). En effet, $\widehat{\theta_1}$ est défavorisé par rapport à la moyenne. On sait d'après la contrainte d'incitation $\left(IC_{\theta\widehat{\theta_1}}\right)$, que lorsqu'il imite $\widehat{\theta_1}$, l'agent θ peut accroître son utilité si il a une aversion à être défavorisé plus faible que $\widehat{\theta_1}$: $\theta < \widehat{\theta_1}$. Symétriquement, il gagnera à imiter $\widehat{\theta_2}$ qui est favorisé par rapport à la moyenne si son goût pour les privilèges est supérieur à $\widehat{\theta_2}$: $\theta > \widehat{\theta_2}$. Comme dans le cas n = 3, on note que les deux seuls agents qui ne sont pas imités sont ceux situés aux extrémités : $\underline{\theta}$ *et* $\overline{\theta}$.
Dans le cadre habituelle de sélection adverse, il n'y a qu'un seul régime. La présence de ces deux régimes ici s'explique par le fait que l'individualisme, paramètre à l'étude, est à caractère relatif :

il mesure la valeur que l'agent accorde à la quantité de bien qu'il reçoit en comparaison de celle que les autres reçoivent. La présence de ces deux régimes jouera un rôle important dans la règle de provision optimale de second rang.

5.3. Analyse de second rang

5.3.1. Programme et schéma d'incitation

Ces déviations de premier rang conduisent le gouvernement à intégrer les contraintes d'incitation au programme *(P_c)*. Il maximise donc :

$$(P_c)\begin{cases} \max_{(q(.),\overline{v},u(.))} \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \psi\big(u(\theta)\big)\, dF(\theta) \\ s.c \begin{cases} u(\theta) \geq u(\hat{\theta}) + (\theta-\hat{\theta})\left(v\left(q(\hat{\theta})\right)-\overline{v}\right) \quad \theta,\hat{\theta}\in[\underline{\theta},\overline{\theta}] \quad (IC_{\theta\hat{\theta}}) \qquad (\mu(\theta)) \\ \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \left[\left(1+\theta-E(\theta)\right) v\big(q(\theta)\big)-u(\theta)-q(\theta)\right] dF(\theta) \geq 0 \quad (FC) \qquad (\lambda) \\ \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \left[v\big(q(\theta)\big)-\overline{v}\right] dF(\theta) = 0 \quad (E) \end{cases} \end{cases}$$

La contrainte (E) est simplement l'expression de $\overline{v}$. La particularité de ce programme, en comparaison du cadre usuel[25], est la présence des quantités $q(\theta')$ dans la contrainte d'incitation de l'agent θ. Comme évoqué précédemment, l'incitation à dévier d'un agent dépend du niveau de bien qu'il reçoit relativement à celui des autres.
Sous cette forme, le programme $(\overline{P_c})$ est très difficilement résolvable en raison de la bidimentionalité des contraintes d'incitation qu'il contient. La Remarque 3 permet de résoudre cette difficulté.

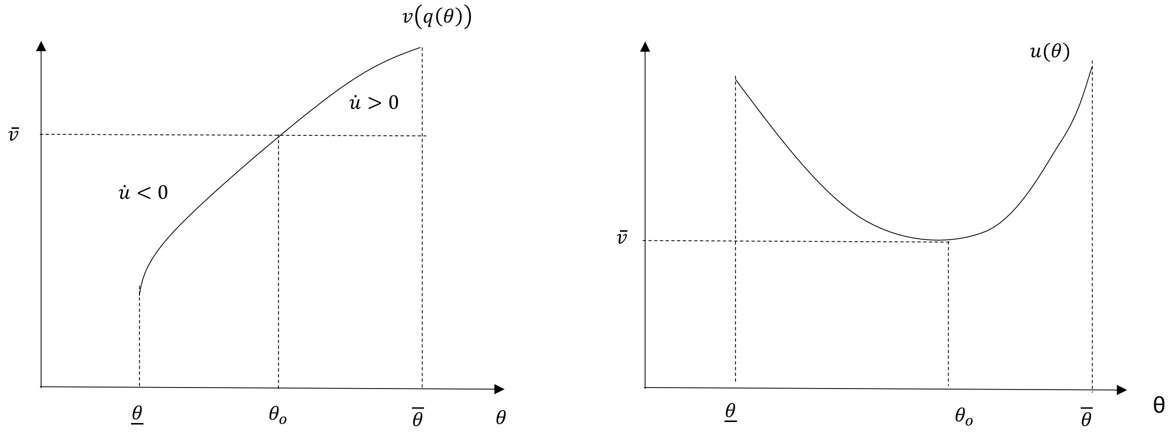
Remarque 3. *Les contraintes* $(IC_{\theta\hat{\theta}})$ *sont vérifiées pour tout* $\theta,\hat{\theta}\in[\underline{\theta},\overline{\theta}]$

si et seulement si $\forall\theta\in[\underline{\theta},\overline{\theta}]$, $\begin{cases}\dot{u}(\theta)=v\big(q(\theta)\big)-\overline{v} & [11] \\ \dot{q}(\theta)\geq 0 & [12]\end{cases}$

Preuve. *Voir annexe*

Les contraintes d'incitations peuvent donc être remplacées par les contraintes [11] et [12]. Cela simplifie considérablement l'analyse. La condition [11] correspond à une condition de premier ordre et la condition [12] du second (voir annexe). On voit d'ores et déjà que si la propriété de croissance de q(.) du premier ordre (voir Résultat 4) est conservée, celle d'équité ne l'est plus au second rang. Ceci est similaire au cas n = 3.
Cette nouvelle formulation permet une meilleure compréhension économique de la manière dont le gouvernement devra procéder pour inciter les agents à la révélation. La Figure 6 montre cela.

[25] Voir Baron et Myerson (1982).



a. Lien entre $v(q(\theta))$ et $\dot{u}(\theta)$

b. Forme de $u(\theta)$

Figure 6. Représentation des contraintes d'incitation

La forme en « U » de $u(\theta)$ se comprend à partir de l'analyse faite au premier rang. Supposons en effet que $u(.)$ soit une ligne horizontale. Dans ce cas, tous les agents à gauche (respectivement à droite) de θ_0 imitent ceux qui sont plus proches de θ_0. Donc pour les inciter à révéler leur vrai type, il faut augmenter leur utilité d'autant plus qu'ils sont éloignés de θ_0. Cela peut également se comprendre formellement à partir de l'équation [10]. Cette représentation graphique permet également de comprendre l'effet sur $u(.)$ de l'augmentation de la quantité fournie à un individu θ: $q(\theta)$.

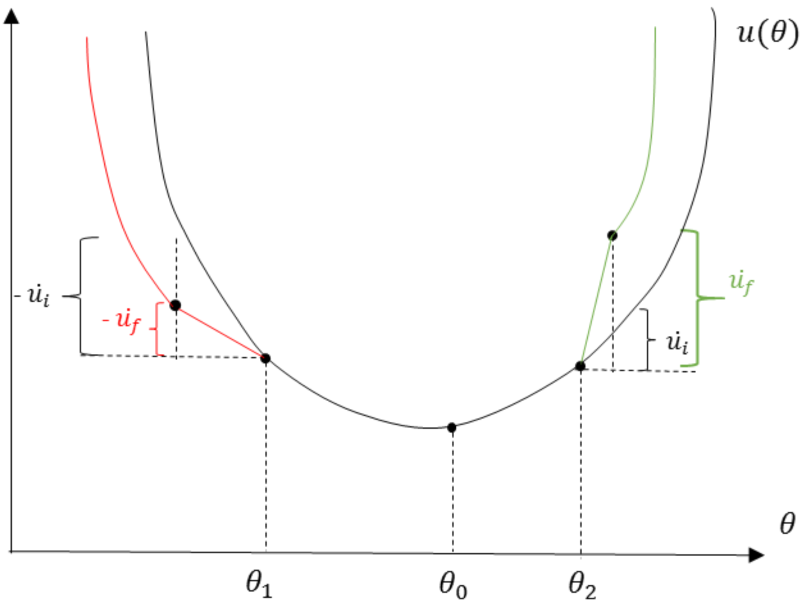


Figure 7. Effet d'une hausse de $q(\theta)$ sur $u(.)$

La Figure 7 représente un agrandissement de ce qui se passe en θ_i lorsque l'on augmente d'un petit montant $q(\theta_i)$. D'après l'équation [11], on sait que cela augmente $\dot{u}(\theta_i)$. Notons que tous les autres $\dot{u}(\theta)$ restent inchangé. Ainsi un accroissement de $q(\theta_2)$ n'affecte pas u(θ) sur $[\underline{\theta}, \theta_2]$; et sur $[\theta_2, \overline{\theta}]$ la courbe noire se transforme en la courbe verte.

Pour mieux comprendre cela, considérons un agent $\theta > \theta_2$. D'après [10], on a :

$$u_{\theta_2}(\theta) = u(\theta_2) + (\theta - \theta_2)\left(v\big(q(\theta_2)\big) - \overline{v}\right)$$

Cette équation signifie que si θ prétend être θ_2, alors il obtient l'utilité de θ_2 mais il savoure davantage que θ_2 d'avoir une plus grande utilité relativement à la moyenne. Cet avantage fait qu'il obtient une utilité supérieure à celle de θ_2 lorsqu'il choisit son contrat. Ainsi lorsque $q(\theta_2)$ augmente, l'avantage de θ sur θ_2 augmente. Donc pour une utilité de θ_2 donnée, θ aura davantage intérêt à imiter θ_2. Il faudra donc augmenter son utilité pour l'inciter à la révélation.

Considérons à présent un agent $\theta < \theta_1$. On a d'après [10] :

$$u_{\theta_1}(\theta) = u(\theta_1) + (\theta_1 - \theta)\left(\overline{v} - v\big(q(\theta_1)\big)\right)$$

Cela signifie que lorsque θ imite θ_1, il reçoit la même utilité que θ_1. Mais il souffre moins que θ_1 d'avoir une faible satisfaction par rapport à la moyenne. Donc il obtient une utilité supérieure à celle de θ_1 lorsqu'il choisit le contrat de θ_1. Cet avantage diminue lorsque θ_1 reçoit une quantité plus grande. Donc θ aura moins intérêt à dévier. On pourra donc réduire le supplément d'utilité que l'on est contraint de lui donner pour l'inciter à la révélation.

Ces quelques remarques permettent non seulement d'avoir une meilleure idée de la manière dont le gouvernement doit procéder pour générer la révélation, mais elles permettront surtout de mieux comprendre la règle de provision optimale.

5.3.2. Règle de provision optimale

Si les quantités de second rang sont croissantes (monotonie non nécessairement strict), elles ne sont pas nécessairement égales aux quantités de premier rang : une distorsion apparaît. L'objectif de ce Paragraphe est précisément de comprendre pourquoi et comment la nécessité d'inciter les agents à la révélation génère cette distorsion.
Comme cela est montrée en annexe, au second rang $q(\theta)$[26] est caractérisée comme suit :

$$\frac{1}{v'\big(q(\theta)\big)} = 1 + \theta - E(\theta) + \frac{1}{\lambda}\left[\frac{\mu(\theta)}{f(\theta)} - E\left(\frac{\mu(\theta)}{f(\theta)}\right)\right] \qquad [13]$$

μ(θ) et λ sont les multiplicateurs du programme $\left(\overline{P_c}\right)$. Comme on peut le constater, la distorsion $\frac{1}{\lambda}\left[\frac{\mu(\theta)}{f(\theta)} - E\left(\frac{\mu(\theta)}{f(\theta)}\right)\right]$ apparaît, en comparaison du premier rang.

Quelques remarques préliminaires peuvent être faites. Premièrement, le terme de gauche de [13], étant l'inverse de l'utilité marginale personnelle, est mesuré en terme de quantité ou de manière équivalente en monnaie, car le prix est normalisé à 1. Le terme entre crochet à droite est par contre mesuré en termes d'utilité. C'est ce qui explique la présence du facteur $\frac{1}{\lambda}$. λ, étant le multiplicateur de la contrainte budgétaire, son inverse permet de convertir les utilités en monnaie.

Deuxièmement, on remarque que la distorsion est définie par la somme de deux termes comme dans le cas n=3. Le second terme constant est de même lié à l'externalité. Il exprime la distorsion identique à tous les *q(θ)* nécessaire afin de réduire ou augmenter $\overline{v}$ de manière à tenir compte des contraintes d'incitation. Comme dans le cas n = 3, elle peut être positive ou négative selon le sens des contraintes d'incitation pertinente $\left(\theta > \hat{\theta}\ ou\ \theta < \hat{\theta}\right)$. L'interprétation est la

[26] Afin de simplifier les notations, ici, $q(\theta) \equiv q^{SR}(\theta)$.

même que dans le cas n = 3. On remarque que ce terme de distorsion est égal à la moyenne du second. Le terme sur la compréhension duquel on se contrera est donc le premier : $\frac{\mu(\theta)}{f(\theta)}$.

L'expression [13] est obtenue sans prendre en compte la contrainte du second ordre[27]. Or puisque $\mu(\theta)$ n'est pas nécessairement croissante (voir annexe), il peut exister des intervalles [θ_1, θ_2] tels que $\dot{q}(\theta) < 0$. Ainsi, sur chacun de ces intervalles, un contrat unique que tous les agents $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ auront intérêt à choisir sera proposé. Le gouvernement perdra donc la capacité à extraire l'information à partir du comportement des agents. Comme cela est montré dans la preuve du Résultat 5, les bornes de ces intervalles et la quantité $\overline{q}$ qui y sera fournie sont caractérisés par :

$$\frac{1}{v'(q(\theta))} = \frac{\int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[1 + \theta - E(\theta) + \frac{1}{\lambda}\left[\frac{\mu(\theta)}{f(\theta)} - E\left(\frac{\mu(\theta)}{f(\theta)}\right)\right]\right] dF(\theta)}{\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\theta) d\theta}$$

Et $\overline{q} = q^{PR}(\theta_1) = q^{PR}(\theta_2)$

Il s'agit d'un système de trois équations à trois inconnues. θ_1, θ_2 *et* $\overline{q}$ pourront donc généralement être déterminés.
On ne s'attardera pas sur ce point essentiellement technique. Par contre, afin de comprendre *la règle de provision optimale* [13], on remarque que cette expression peut s'exprimer de la manière suivante.

Résultat 5. *Dans le cas d'un continuum de types au second rang, la règle de provision optimale de biens est la suivante :*

1. *Sur* $[\underline{\theta}, \theta_o]$,
$$\frac{1}{v'(q(\theta))} = 1 + \theta - E(\theta) + \frac{1}{\lambda}\left[\frac{F(\theta)}{f(\theta)} d_1(\theta) - E\left(\frac{F(\theta)}{f(\theta)} d_1(\theta)\right)\right] \quad [14]$$
2. *Sur* $[\theta_o, \bar{\theta}]$,
$$\frac{1}{v'(q(\theta))} = 1 + \theta - E(\theta) + \frac{1}{\lambda}\left[\frac{1-F(\theta)}{f(\theta)} d_2(\theta) - E\left(\frac{1-F(\theta)}{f(\theta)} d_2(\theta)\right)\right] \quad [15]$$
Où θ_0 est caractérisé par $v(q(\theta)) = \overline{v}$

$$d_1(\theta) \equiv -E\left[\psi'(u(t)) - \lambda | \, t \leq 0\right]$$
$$d_2(\theta) \equiv E\left[\psi'(u(t)) - \lambda | \, t \geq 0\right]$$

3. *$d_1(.)$ et $d_2(.)$ sont décroissantes et $d_i(.)$ $i \in \{1,2\}$ est positif puis négatif.*

Avant tout, notons que le Résultat 5 implique une propriété analogue à la Propriété 2. En effet, se rappelant que $F(\underline{\theta}) = 0$ *et* $F(\bar{\theta}) = 1$, on retrouve le Résultat suivant.

Propriété 4. *Dans le cas d'un continuum d'agents au second rang, hors la distorsion liée à l'externalité $\overline{v}$, les quantités reçues par les deux agents non imités sont inchangées par rapport au premier rang. Ces deux agents sont ceux situés aux deux extrémités de la distribution : les agents $\underline{\theta}$ et $\bar{\theta}$.*

---

27 Voir discussion en annexe : preuve du Résultat 5.

Par ailleurs, les expressions [14] et [15] montrent que la règle de provision optimale préconise une distorsion d'autant plus grande en termes absolus qu'il y a un nombre élevé d'agents imitant θ. Ainsi sur $[\underline{\theta}\,, \theta_o]$ (resp. $[\theta_o, \bar{\theta}]$), tous les agents moins (resp. plus) individualistes que θ l'imitent. Plus ils sont nombreux, plus F(θ) (resp. 1-F(θ)) est élevé et donc plus la distorsion sera ample. Cela est assez intuitif : plus les déviations sont nombreuses, plus le gouvernement est prêt à faire de sacrifice en termes d'efficacité pour les dissuader. On remarque par ailleurs qu'il est préconisé de distordre d'autant moins que les individus de type θ sont nombreux : le sacrifice en termes d'efficacité devient dans ce cas en effet plus coûteux.[28]

5.3.3. L'effet des incitations sur la règle de provision optimale

Afin de comprendre[29] la raison de la présence des $d_i(\theta)$ dans le choix de $q(\theta)$, il est à noter que [14] et [15] expriment le fait que la quantité optimale est celle qui égalise le gain marginal (le terme de droite multiplié par $v'\big(q(\theta)\big)$) et le coût marginal (égal à 1 par normalisation) d'une légère augmentation de $q(\theta)$. Ainsi,

$$\frac{1}{\lambda}\,\frac{F(\theta)}{f(\theta)}\,d_1(\theta)\;v'\big(q(\theta)\big) \qquad [16]$$

$$\text{et } \frac{1}{\lambda}\,\frac{1-F(\theta)}{f(\theta)}\,d_2(\theta)\;v'\big(q(\theta)\big) \qquad [17]$$

sont les gains marginaux que le mécanisme incitatif implique consécutivement à une hausse de $q(\theta)$. En effet, sur $[\theta_o, \bar{\theta}]$ un accroissement de q(θ) suscite une hausse de son utilité personnelle de $v'\big(q(\theta)\big)$. La contrainte d'incitation [11] et la Figure 7 montrent que cela augmente l'utilité de tous les agents au-dessus de θ. Le gain marginal moyen[30] de cette hausse d'utilité pour le gouvernement est $E\,[\psi'(u(t))|t \geq \theta\,]$ et le coût marginal moyen en termes d'utilité est $[1 - F(\theta)]\,\lambda = E[\,\lambda\,|t \geq 0]$. En résumé, puisqu'une augmentation de la quantité de f(θ) agents génère la hausse de l'utilité de $1 - F(\theta)$ agents en termes monétaires, le gain marginal est donc $\frac{1}{\lambda}\,\big(1 - F(\theta)\big)d_1(\theta)\,v'\big(q(\theta)\big)$ et le coût marginal $1 \times f(\theta)$. Ceci explique le terme [17]. Le terme [16] s'explique de la même manière. La seule différence est la présence du signe « - » devant l'espérance dans $d_2(\theta)$. Celui-ci s'explique par le fait que sur $[\underline{\theta}\,, \theta_o]$ une hausse de q(θ) génère une baisse des utilités et non une hausse comme cela peut être observé sur la Figure 7.

Il est à présent possible de comprendre la raison pour laquelle $q(\theta)$ a toujours une composante décroissante : $d_1(\theta)$ sur$[\underline{\theta}\,, \theta_o]$ et de $d_2(\theta)$ sur $[\theta_o, \bar{\theta}]$. La Figure 7 permet de comprendre le développement suivant. Afin de ne pas obscurcir le raisonnement, on fait ici l'hypothèse d'une distribution uniforme des types ($\frac{1-F}{f}$ constante).

Sur $[\theta_0, \bar{\theta}]$, plus θ est élevé, plus les utilités qui augmenteront (u(θ'), pour les θ' >θ) suite à la hausse de q(θ) seront initialement élevées. Ainsi, l'augmentation de l'objectif du gouvernement ; $E\,[\psi'\big(u(t)\big)|t \geq \theta\,]$ sera en moyenne d'autant plus faible que θ est élevé. Cela est

---

[28] Ces deux effets sont synthétisés par la présence des termes $\frac{F(\theta)}{f(\theta)}$ et $\frac{1-F(\theta)}{f(\theta)}$ communément appelés *taux de hasard.*

[29] *Voir annexe : preuve du Résultat 5.*

[30] Ces deux effets sont synthétisés par la présence des termes $\frac{F(\theta)}{f(\theta)}$ et $\frac{1-F(\theta)}{f(\theta)}$ communément appelés *taux de hasard.*

dû aux préoccupations redistributives du gouvernement ($\psi'' < 0$) : il accorde moins d'importance à l'accroissement d'utilité d'agents ayant déjà une utilité élevée. Ainsi, *toute chose égale par ailleurs*, le gouvernement fournira une quantité plus faible aux individus plus individualistes. Il a en effet peu intérêt à augmenter ces quantités, puisque son objectif augmentera moins.

Un raisonnement symétrique peut être effectué sur $[\underline{\theta}, \theta_o]$, plus θ est élevé, plus les utilités qui diminueront ($u(\theta'), pour\ les\ \theta' < \theta$) suite à la hausse de $q(\theta)$, seront initialement faibles. Ainsi, la diminution de l'objectif du gouvernement sera en moyenne d'autant plus forte que θ est élevé. Donc, *toute chose égale par ailleurs*, le gouvernement fournira une quantité plus faible aux individus plus individualistes. Il a en effet peu intérêt à augmenter ces quantités car son objectif diminuera plus.

En résumé, lorsque le gouvernement n'observe pas le type des agents, comme au premier rang les quantités fournies sont croissantes avec le niveau d'individualisme des individus (le terme $1 + \theta - E(\theta)$ « domine » en quelque sorte les autres). Toutefois, abstraction faite des questions de répartition de la population[31], ce schéma est en partie corrigé par les préoccupations redistributive du gouvernement : la quantité croît moins vite en fonction du niveau d'altruisme qu'au premier rang.

L'externalité que représente $\overline{v}$ génère, quant à elle, une distorsion constante, positive ou négative, selon la spécification du modèle. Cette seconde distorsion n'est autre que la moyenne des premières. Elle est identique pour tous les agents.

La Propriété 5 résume la règle de provision optimale que doit suivre le gouvernement selon qu'il observe ou pas le type des agents.

Propriété 5.

1. Dans le cas d'un continuum d'agents, lorsque le gouvernement observe le niveau d'individualisme des agents, la règle de provision optimale est exclusivement guidée par l'enjeu d'efficacité. Le gouvernement doit procurer à un agent une quantité d'autant plus grande qu'il est individualiste.

2. Lorsque le gouvernement n'observe pas le type des agents, la règle de provision optimale tient en compte à la fois des enjeux d'efficacité et de redistribution. La première préconise de fournir une quantité supérieure de biens aux individus plus individualistes. Tandis que la seconde invite à fournir davantage aux individus plus altruistes. Toutefois, le premier effet l'emporte sur le second.

6. Remarques conclusives

Depuis maintenant plusieurs années, l'existence d'externalités dans la satisfaction des individus fait l'objet d'un intérêt certain dans la littérature portant sur l'économie publique. L'une des externalités les plus fréquemment étudiées est l'altruisme. La plupart des travaux considèrent ce dernier comme un paramètre représentant le poids de l'utilité d'autrui dans la satisfaction individuelle. Cela aboutit généralement à une structure linéaire de la fonction d'utilité de

---

[31] Le lecteur remarquera que lorsque $\frac{1-F}{f}$ est constante, $d_1(\theta_0) = d_2(\theta_0)$ donc la distorsion est décroissante et continue sur $[\underline{\theta}, \overline{\theta}]$.

l'individu[32]. C'est également le cas dans l'étude ici-présentée. Lorsque l'altruisme est une pondération relative, c'est-à-dire que le poids accordé à autrui est d'autant plus grand que l'individu accorde moins d'importance à sa propre personne, deux conséquences sont habituellement trouvées concernant la règle de provision optimale d'un bien par un gouvernement.
Premièrement, l'individu reçoit plus que s'il était exclusivement individualiste. Deuxièmement, chacun doit recevoir d'autant plus qu'il est individualiste[33]. Dans ce papier, l'altruisme étudié est à caractère relatif.

Très peu d'études cependant lèvent l'hypothèse d'observabilité du paramètre d'altruisme bien que celle-ci soit le concernant une hypothèse très restrictive. Dans cette étude, l'asymétrie informationnelle est prise en compte. On y retrouve les propriétés usuelles des modèles d'altruisme relatif. Toutefois, le cadre d'étude de la sélection adverse nécessite une compréhension précise de ce que représente le paramètre d'altruisme. On montre que l'interprétation habituelle en termes de poids relatif mis sur la satisfaction personnelle et sur celle d'autrui n'est pas suffisamment précise. Il s'agit davantage d'un paramètre mesurant la manière dont l'individu perçoit sa situation relativement à celle des autres. Il est également montré que lorsque cet altruisme relatif est une information privée des individus, le sens des incitations à *dévier* de leurs vrais types dépend de ce que les individus reçoivent une quantité de bien qui leur permette d'obtenir une satisfaction supérieure ou inférieure à celle d'autrui.

Lorsqu'il effectue un choix public, le gouvernement a le plus souvent des préoccupations de redistribution. C'est ce que l'on suppose dans l'étude. Il est montré que lorsque le gouvernement observe le type des agents, il est en mesure de concilier ses objectifs d'efficacité et de redistribution. Dans le cas contraire, il est contraint à opérer un arbitrage entre efficacité et équité. Il est aussi montré qu'en présence d'information asymétrique, le résultat habituel de fourniture croissante avec le niveau d'individualiste est maintenu. Cependant, un effet opposé provenant des préoccupations redistributives du gouvernement limite cette relation croissante. Enfin, les divers résultats présentés apprennent que l'externalité qu'est l'altruisme a un effet identique sur les quantités fournies quel que soit le niveau d'altruisme de l'individu, que l'information soit parfaite ou asymétrique. En présence d'asymétrie informationnelle, cet effet peut être positif ou négatif selon la distribution des types au sein de la population et les objectifs redistributifs du gouvernement.
Afin d'approfondir cette étude, nombre de voies pourrait être développées. Dans le modèle présenté, l'hypothèse de linéarité de la fonction d'utilité est conservée. Si cela rend l'analyse plus aisée, cela restreint inévitablement la généralité des résultats obtenus. Une généralisation de ce cadre d'analyse permettra de mettre en évidence les propriétés qui reposent sur l'hypothèse de linéarité et celles qui lui sont indépendantes. Une autre faiblesse du présent modèle est d'avoir supposé que bien que le niveau d'altruisme n'est pas observable, il demeure vérifiable. Ainsi, une tierce autorité, à l'instar d'une cour de justice serait en mesure de faire appliquer le contrat. Supposons qu'après avoir enquêté, le gouvernement affirme qu'un individu a menti concernant son type. Si les deux persistent à déclarer des types différents un contrat ne pourra être appliqué que si une tierce partie intervient. Si elle a les moyens de vérifier le type de l'agent, cette tierce autorité pourra faire appliquer le bon contrat, c'est-à-dire celui de premier rang. Sinon, comme c'est plus probablement le cas, elle devra définir un mécanisme direct révélateur. Dutta-Sen (1991) et Moore-Repullo (1990) étudie ce cas dans un modèle à deux types. Mais à notre connaissance, l'introduction d'une externalité de type altruisme n'a pas encore été étudiée sous l'hypothèse de non-vérifiabilité.

[32] Voir les diverses études sur l'altruisme en microéconomie des ménages.
[33] La condition de Bowen-Lindhal-Samuelson montre bien cela.

Annexe

Preuve du Résultat 1.

Le Lagrangien du programme s'écrit :

$$\mathcal{L} \equiv \sum_{i=1}^{2} p_i \left\{\psi(u_i) + \lambda\big(1 + \theta_i - E(\theta)\big)\, v(q_i) - u_i - q_i \right\}$$

$\mathcal{L}$ est concave par rapport à u_i et q_i car $v'' < 0$ et $\psi'' < 0$. Les CPOs sont donc suffisantes.

1. $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} = 0 \iff \psi'(u_i) = \lambda \quad \forall i \in [\![1,2]\!]$

Donc $\psi'(u_1) = \psi'(u_2)$

Donc $u_1 = u_2$ car $\psi'' < 0$

On note que (FC) est saturée car $\lambda > 0$.

2. $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \iff \lambda\left[\big(1 + \theta_i - E(\theta)\big)\, v'(q_i) - 1\right] = 0$

Or $\lambda = \Psi'(u_i) > 0$

Donc $\frac{1}{v\prime(q_i)} = 1 + \theta_i - E(\theta)$

3. a. $\frac{1}{v\prime}$ est croissante car $v'' < 0$ Donc $q_2 > q_1$

b. $u_1 = u_2 \iff t_2 - t_1 = \theta_2\,(v(q_2) - \overline{v}) - \theta_1\,(v(q_1) - \overline{v})$

Or $v(q_1) < \overline{v} < v(q_2)$ car $q_1 < q_2$ et $\overline{v}$ est la valeur moyenne de $v(q_i)$

Donc $t_2 > t_1$

□

Preuve du Résultat 3.

On note d'abord qu'il y a six contraintes d'incitation dans le programme (P) : (IC_{12}), (IC_{13}), (IC_{21}), (IC_{23}), (IC_{31}) et (IC_{32}). Toutefois, l'analyse réalisée en Section 3 donne l'intuition que sous l'Hypothèse 1, la seule contrainte pertinente sera (IC_{12}). On montrera en fin de démonstration que cette intuition est justifiée.

Le programme s'écrit alors :

$$(P)\left\{\begin{array}{l} \max\limits_{(q_i,u_i)} \sum_{i=1}^{3} p_i\ \psi(u_i) \\ s.c\left\{\begin{array}{ll} u_1 - u_2 + \Delta\theta_{21}\,(v(q_2) - \overline{v}) \geq 0 & (IC_{12}) \quad (\mu) \\ \sum_{i=1}^{3} p_i\left[\big(1 + \theta_i - E(\theta)\big)\, v(q_i) - u_i - q_i\right] \geq 0 & (FC) \quad (\lambda) \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Les résultats seront démontrés dans l'ordre suivant 2. , 4. , 3. puis 1.

Les CPOs sur les u_i donnent[34] :

$$\psi'(u_1^{SR}) = \lambda - \frac{\mu}{p_1} \qquad [18]$$

$$\psi'(u_2^{SR}) = \lambda + \frac{\mu}{p_2} \qquad [19]$$

$$\psi'(u_3^{SR}) = \lambda \qquad [20]$$

Or $\mu \geq 0$ et $\psi' < 0$

Donc $u_2^{SR} \leq u_3^{SR} \leq u_1^{SR}$

On montrera ci-après que ces inégalités sont strictes. On note de plus que $\lambda = \psi'(u_3^{SR}) > 0$. Donc (FC) est saturée.

4. Puisque $\overline{v} = \sum_{i=1}^{3} p_i\, v(q_i)$, les CPOs sur les q_i donnent[35] :

$$\frac{1}{v'(q_1^{SR})} = 1 + \theta_1 - E(\theta) - \frac{\mu}{\lambda}\Delta\theta_{21} \qquad [21]$$

$$\frac{1}{v'(q_2^{SR})} = 1 + \theta_2 - E(\theta) - \frac{\mu}{\lambda}\Delta\theta_{21} + \frac{\mu}{\lambda}\frac{1}{p_2}\Delta\theta_{21}$$

$$= 1 + \theta_2 - E(\theta) + \frac{\mu}{\lambda}\,\frac{1-p_2}{p_2}\Delta\theta_{21} \qquad [22]$$

$$\frac{1}{v'(q_3^{SR})} = 1 + \theta_3 - E(\theta) - \frac{\mu}{\lambda}\Delta\theta_{21} \qquad [23]$$

Or en additionnant [18] et [19] on obtient :

$$\lambda = \frac{1}{p_1 + p_2}\left(p_1\, \psi'(u_1^{SR}) + p_2\, \psi'(u_2^{SR})\right)$$

Et $p_1 \times$ [19] – $p_2 \times$ [18] donne :

$$\mu = \frac{p_1 p_2}{p_1 + p_2}\left(\psi'(u_2^{SR}) - \psi'(u_1^{SR})\right)$$

Donc $\frac{\mu}{\lambda} = p_1 p_2 \frac{\psi'(u_2^{SR}) - \psi'(u_1^{SR})}{p_1\, \psi'(u_1^{SR}) + p_2\, \psi'(u_2^{SR})}$

En posant $\sigma = \frac{\psi'(u_2^{SR})}{\psi'(u_1^{SR})}$ et après quelques manipulation, on obtient :

$$\frac{\mu}{\lambda} = p_1\left[1 - \frac{1}{p_2\,\sigma + p_1}\right] \equiv d(\sigma)$$

On a $\sigma > 0$, onc on a bien d(.) positive, croissante et d(1)= 0.

Par ailleurs, sous l'Hypothèse 1, on remarque que les déviations des q_i par rapport au premier rang sont faibles ($\Delta\theta_{21}$, proche de zéro). Ainsi les q_i^{SR} sont proches des q_i^{PR}, les $v(q_i^{SR})$ des $v(q_i^{PR})$ et $\overline{v}^{SR}$ de $\overline{v}^{PR}$. Donc $v(q_2^{SR}) < \overline{v}^{SR}$. D'après ($IC_{12}$), il en résulte que $u_1^{SR} > u_2^{SR}$. Donc $\mu >$

---

[34] Si l'on fait abstraction du fait que le multiplicateur λ est différent de celui du premier rang, on remarque que u_2 diminue, u_1 augmente alors que u_3 n'est pas affecté en comparaison du premier rang où $\psi'(u_i) = \lambda\ \forall i \in [\![1,3]\!]$.

[35] Par rapport au premier rang, on remarque que (IC_{12}) impose à q_1, q_2 et q_3 une même baisse afin de réduire $\overline{v}$. Mais il y a un effet additionnel sur q_2 : q_2 doit aussi augmenter afin d'accroître (q_2). Ce second effet l'emporte sur le premier. Voir la Section 3.2.

0 et (IC_{12}) est saturée. Enfin, on peut déduire des expressions [18], [19] et [20] que $u_2^{SR} < u_3^{SR} < u_1^{SR}$.

3. On a : $q_2^{SR} > q_1^{SR} \Leftrightarrow \frac{1}{v\prime(q_2^{SR})} - \frac{1}{v'(q_1^{SR})} > 0$

$$\Delta\theta_{21}\left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\frac{1}{p_2}\right) > 0 \quad \text{ce qui est vrai}$$

On a : $q_3^{SR} > q_2^{SR} \Leftrightarrow \Delta\theta_{32} > \frac{\mu}{\lambda}\frac{1}{p_2}\Delta\theta_{21} > 0$

ce qui est vrai car $\Delta\theta_{21} = o(\Delta\theta_{32})$ d'après l'Hypothèse 1.

Donc $q_1^{SR} < q_2^{SR} < q_3^{SR}$[36]

1. On montre ici que les cinq contraintes d'incitation restantes sont vérifiées.

Assertion 1. (IC_{32}) est vérifiée.

On a : $u_3^{SR} \geq u_2^{SR}$ et $\Delta\theta_{32}\left(v(q_2^{SR}) - \overline{v}^{SR}\right) \leq 0$, *puisque* $v(q_2^{SR}) < \overline{v}^{SR}$

D'où $u_3^{SR} \geq u_2^{SR} + \Delta\theta_{32}\left(v(q_2^{SR}) - \overline{v}^{SR}\right)$ (IC_{32})

Assertion 2. (IC_{21}) et (IC_{23}) sont vérifiées.

Cela provient du fait que $q_1^{SR} < q_2^{SR} < q_3^{SR}$ définition du programme (P)

On sait que (IC_{12}) est vérifiée.

$$\text{On a } \; u_1^{SR} = u_2^{SR} - \Delta\theta_{21}\left(v(q_2^{SR}) - \overline{v}^{SR}\right) \; (IC_{12})$$

Donc (IC_{21}) $u_2^{SR} \geq u_1^{SR} + \Delta\theta_{21}\left(v(q_1^{SR}) - \overline{v}^{SR}\right)$ est vérifiée si et seulement si

$0 \geq \Delta\theta_{21}\left(v(q_1^{SR}) - v(q_2^{SR})\right)$ expression obtenue en additionnant (IC_{12}) et (IC_{21}).

Donc (IC_{21}) est vérifiée lorsque $q_1^{SR} \leq q_2^{SR}$, ce qui est vrai.

De même, puisque (IC_{32}) est vérifiée d'après l'Assertion 1, on a (IC_{23}) vérifiée lorsque $q_2^{SR} \leq q_3^{SR}$, ce qui est vrai.

Assertion 3. (IC_{13}) et (IC_{31}) sont vérifiées.

Ces deux contraintes globales sont vérifiées car les quatre autres contraintes locales le sont.[37]

On a : (IC_{12}) + (IC_{23}) $\Leftrightarrow u_1^{SR} \geq u_3^{SR} - \Delta\theta_{21}\left(v(q_2^{SR}) - \overline{v}^{SR}\right) - \Delta\theta_{32}\left(v(q_3^{SR}) - \overline{v}^{SR}\right)$

$$\text{Donc } u_1^{SR} \geq u_3^{SR} - (\Delta\theta_{32} + \Delta\theta_{21})\left(v(q_3^{SR}) - \overline{v}^{SR}\right) \quad \text{car } q_2^{SR} \leq q_3^{SR}$$

$$\text{Donc } u_1^{SR} \geq u_3^{SR} - \Delta\theta_{31}\left(v(q_3^{SR}) - \overline{v}^{SR}\right) \qquad (IC_{13})$$

---

[36] On voit que l'Hypothèse 1 permettra d'éviter les problèmes de *bouchonnement.*

[37] Cela est dû au fait que la condition de Spence-Mirrless est vérifiée : $\frac{d}{d\theta}\frac{Uq}{Ut} = v'(q) > 0$ est de signe constant.

De même, (IC_{32}) + (IC_{21}) et $q_1^{SR} \leq q_2^{SR}$ donnent (IC_{31}).

□

Preuve du Résultat 4.

Le lagrangien associé au programme (P_c) est

$$\mathcal{L} \equiv \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \{ \psi(u(\theta)) + \lambda[(1 + \theta - E(\theta))\, v(q(\theta)) - u(\theta) - q(\theta)] \}\, dF(\theta)$$

On note $\tilde{\mathcal{L}} \equiv \psi(u(\theta)) + \lambda[(1 + \theta - E(\theta))\, v(q(\theta)) - u(\theta) - q(\theta)] f(\theta)$

u(.) et q(.) se déduisent d'une maximisation point par point. Les CPOs donnent immédiatement :

1. $\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial u} = 0 \iff \psi'(u(\theta)) = \lambda > 0 \quad \theta \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$

   Car $f(\theta) > 0$

Donc $\forall\, \theta, \theta' \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}],\ u(\theta) = u(\theta')$

Donc u(.) est constante.

2. $\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial q} = 0 \iff \frac{1}{v'(q(\theta))} = 1 + \theta - E(\theta) \qquad car\ \lambda, f > 0$

3. $q(.)$ est croissante car $v'' < 0$

□

Preuve de la Remarque 3.

On rappelle d'abord que l'utilité 3 s'écrit $u(\theta) = \overline{v} + \theta\, (v(q(\theta)) - \overline{v}) - t(\theta)$

Ainsi la contrainte d'incitation $(IC_{\theta\hat{\theta}})$ s'écrit :

$$\theta\, (v(q(\theta)) - \overline{v}) - t(\theta) \geq \theta \left(v\left(q(\hat{\theta})\right) - \overline{v}\right) - t(\hat{\theta}) \quad (IC_{\theta\hat{\theta}})$$

Pour démontrer le résultat, on prouve d'abord que :

$$\forall\, \theta, \theta' \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}], (IC_{\theta\hat{\theta}})\ vérifiée \iff \begin{cases} \forall\, \theta \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}],\ \theta v'(q(\theta))\, \dot{q}(\theta) - \dot{t}(\theta) = 0 & (\mathcal{E}_1) \\ \dot{q}(\theta) \geq 0 & (\mathcal{E}_2) \end{cases}$$

Assertion 1. Le sens direct est vrai.

Si $\forall\, \theta, \theta' \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}], (IC_{\theta\hat{\theta}})$ est vérifiée,

Alors $\theta = arg \max_{(\hat{\theta})} \{ \theta \left(v\left(q(\hat{\theta})\right) - \overline{v}\right) - t(\hat{\theta}) \}$ [21]

Donc $\theta v'(q(\theta))\,\dot{q}(\theta) - \dot{t}(\theta) = 0 \quad \forall\, \theta \in [\,\underline{\theta}, \overline{\theta}\,]$ qui est la condition du premier ordre de [21][38].

On a également

$$\theta\,(\,v(q(\theta)) - \overline{v}) - t(\theta) \geq \theta\left(v\left(q(\hat{\theta})\right) - \overline{v}\right) - t(\hat{\theta}) \quad (IC_{\theta\hat{\theta}})$$

$$\hat{\theta}\left(v\left(q(\hat{\theta})\right) - \overline{v}\right) - t(\hat{\theta}) \geq \hat{\theta}(\,v(q(\theta)) - \overline{v}) - t(\theta) \quad (IC_{\hat{\theta}\theta})$$

En additionnant membre à membre ces deux inégalités, on obtient :

$$(\hat{\theta} - \theta)\left(\,v\left(q(\hat{\theta})\right) - v(q(\theta))\right) \geq 0$$

Donc $\hat{\theta} \geq \theta \Leftrightarrow q(\hat{\theta}) \geq q(\theta)$

Donc q(.) est croissante sur $[\,\underline{\theta}, \overline{\theta}\,]$

Donc $\dot{q}(\theta) \geq 0 \quad \forall\, \theta \in [\,\underline{\theta}, \overline{\theta}\,] \quad (\varepsilon_2)$

Assertion 2. Le sens réciproque est vrai. Supposons $(\mathcal{E}_1)$ et $(\mathcal{E}_2)$ vrais pour tout $\theta \in [\,\underline{\theta}, \overline{\theta}\,]$. En écrivant $(IC_{\theta\hat{\theta}})$ sous la forme [21], on voit que $(IC_{\theta\hat{\theta}})$ est vraie si et seulement si la condition du second ordre est vérifiée, puisque celle du premier ordre $(\mathcal{E}_1)$ est supposée vérifiée.

La SOC est :

$$\theta\left[v''(q(\theta))\,\dot{q}(\theta) + v'(q(\theta))\,\ddot{q}(\theta)\right] - \ddot{t}(\theta) \leq 0$$

On note

$$f_1(\theta) \equiv \theta v'(q(\theta))\,\dot{q}(\theta) - \dot{t}(\theta)$$

$$f_1(\theta) \equiv \theta\left[v''(q(\theta))\,\dot{q}(\theta) + v'(q(\theta))\,\ddot{q}(\theta)\right] - \ddot{t}(\theta)$$

Puisque $(\mathcal{E}_1)$ est vérifiée, on a :

$$\forall\, \theta \in [\,\underline{\theta}, \overline{\theta}\,], \qquad g(\theta) = 0$$

Donc $\dot{g}(\theta) = 0$

Or $\dot{g}(\theta) = v'(q(\theta))\dot{q}(\theta) + h(\theta)$

Donc $h(\theta) = -v'(q(\theta))\dot{q}(\theta)$

Donc (la SOC est vérifiée) $\Leftrightarrow h(\theta) \leq 0$

$$\Leftrightarrow v'(q(\theta))\dot{q}(\theta) \geq 0$$

$\Leftrightarrow \dot{q}(\theta) \geq 0$ car v' > 0 ce qui est vrai car (ε_2) est supposée vérifiée.

Donc on a bien $(IC_{\theta\hat{\theta}})$ vérifiée.

---

[38] On suppose l'existence d'une solution intérieure.

Assertion 3. $(\varepsilon_1) \Leftrightarrow \dot{u}(\theta) = v\big(q(\theta)\big) - \overline{v}$

On a : $u(\theta) = \overline{v} + \theta\big(v\big(q(\theta)\big) - \overline{v}\big) - t(\theta)$

Donc $\dot{u}(\theta) = v\big(q(\theta)\big) - \overline{v} - g(\theta)$

$(\varepsilon_1) \Leftrightarrow g(\theta) = 0$

$\Leftrightarrow \dot{u}(\theta) = v\big(q(\theta)\big) - \overline{v}$

□

Preuve du Résultat 5.

Programme et condition du premier ordre :

En remplaçant $\big(IC_{\theta\hat{\theta}}\big)$ par [11] et [12] dans le programme $\big(\overline{P_c}\big)$ on obtient :

$$\big(\overline{P}_c\big)\begin{cases} \max\limits_{(q(.),\overline{v},u(.))} \displaystyle\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \psi\big(u(\theta)\big)\, dF(\theta) \\ s.c \begin{cases} \dot{u}(\theta) = v\big(q(\theta)\big) - \overline{v} \qquad \forall\, \theta \in [\,\underline{\theta}, \overline{\theta}\,] \qquad \big(\mu(\theta)\big) \\ \displaystyle\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \big[\, \big(1 + \theta - E(\theta)\big)\, v\big(q(\theta)\big) - u(\theta) - q(\theta)\big]\, dF(\theta) \geq 0 \qquad (\lambda) \\ \displaystyle\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \big[\, v\big(q(\theta)\big) - \overline{v}\,\big] dF(\theta) = 0 \qquad (\gamma) \end{cases} \end{cases}$$

Où $\mu\big(\underline{\theta}\big) = \mu\big(\overline{\theta}\big) = 0$ car le programme n'a pas de conditions aux bornes sur $u\big(\underline{\theta}\big)$ et $u\big(\overline{\theta}\big)$.

On fait ici d'abord abstraction de la condition du second ordre [12] $\dot{q}(\theta) \geq 0$. Comme cela est d'usage, on essaiera de savoir si $q(\theta)$ est croissante après avoir obtenu sa caractérisation. Si ce n'est pas nécessairement le cas, la contrainte [12] devra être réintégrée au programme.

Le lagrangien du problème $\big(\overline{P}_c\big)$ est :

$$\mathcal{L} \equiv \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \big\{\, \psi\big(u(\theta)\big) f(\theta) + \mu(\theta)\big[\, v\big(q(\theta)\big) - \overline{v}\,\big] + \lambda\big[\, \big(1 + \theta - E(\theta)\big)\, v\big(q(\theta)\big) - u(\theta) - q(\theta)\big]\, f(\theta) \\ + \gamma\big[\, v\big(q(\theta)\big) - \overline{v}\,\big] f(\theta)\big\}\, d\theta$$

On note $\widetilde{\mathcal{L}}$ l'expression sous l'intégrale.

Si $u(\theta)$ et $q(\theta)$ s'obtiennent à partir d'une maximisation point par point la détermination de $\overline{v}$, quant à elle, résulte de la maximisation de $\mathcal{L}$.

Les conditions du premier ordre sont donc :

D'après le principe de Pontriaguine,

On a :

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial u} = -\dot{\mu}(\theta) \Leftrightarrow \dot{\mu}(\theta) = \big[\lambda - \psi\big(u(\theta)\big)\big] f(\theta) \qquad [22]$$

De plus,

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial q} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{v'(q(\theta))} = 1 + \theta - E(\theta) + \frac{1}{\lambda}\left[\gamma + \frac{\mu(\theta)}{f(\theta)}\right] \qquad [23]$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overline{v}} = 0 \Leftrightarrow \gamma = -\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \mu(t)dt \qquad [24]$$

Ainsi, d'après [23] et [24], on obtient :

$$\frac{1}{v'(q(\theta))} = 1 + \theta - E(\theta) + \frac{1}{\lambda}\left[\frac{\mu(\theta)}{f(\theta)} - E\left(\frac{\mu(\theta)}{f(\theta)}\right)\right]$$

en observant que $\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \mu(t)dt = E\left(\frac{\mu(\theta)}{f(\theta)}\right)$

Expressions de λ et $\mu(\theta)$

En intégrant [22] entre $\underline{\theta}$ *et* $\overline{\theta}$, sachant que $\mu(\underline{\theta}) = \mu(\overline{\theta}) = 0$, on obtient

$$\lambda = \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \psi'(u(t))\, dF(t) = E[\psi'(u(\theta))$$

En intégrant [22] entre $\underline{\theta}$ *et* θ, on obtient :

$$\mu(\theta) = \int_{\underline{\theta}}^{\theta} [\lambda - \psi'\left(u(t)\right)]dF(t)$$

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\mu(\theta)}{f(\theta)} = -\frac{1}{\lambda}\frac{F(\theta)}{f(\theta)} E\left[\psi'(u(t)) - \lambda | t \leq \theta\right] \qquad [25]$$

En intégrant [22] entre $\underline{\theta}$ *et* $\overline{\theta}$, on obtient :

$$\mu(\theta) = \int_{\theta}^{\overline{\theta}} \left[\psi'\left(u(t)\right) - \lambda\right]dF(t)$$

Donc $$\frac{1}{\lambda}\frac{\mu(\theta)}{f(\theta)} = -\frac{1}{\lambda}\frac{1-F(\theta)}{f(\theta)} E\left[\psi'(u(t)) - \lambda | t \geq \theta\right] \qquad [26]$$

On remarque que [25] et [26] présentent deux manières différentes d'écrire un même terme $\frac{1}{\lambda}\frac{\mu(\theta)}{f(\theta)}$.

Ces deux expressions sont utilisées alternativement dans le corps de l'étude selon l'interprétation économique la plus appropriée.

Sens de variation de $\theta \mapsto \theta + \frac{1}{\lambda}\frac{\mu(\theta)}{f(\theta)}$

Puisque l'on n'a pas imposé de contrainte sur le sens de variation de $q(\theta)$, la contrainte d'incitation $\dot{u}(\theta) = v(q(\theta)) - \overline{v}$ peut être croissante ou décroissante sur des intervalles qui ne sont pas explicables aisément à partir des conditions du premier ordre que nous avons obtenus.

Pour déterminer ces intervalles, il faudrait résoudre le système d'équation différentiel que ces contraintes définissent. Cela est complexe et ne présente pas d'intérêt dans cette analyse dont l'objectif est de présenter des intuitions économiques avant tout.

Ainsi $\psi'\left(u(\theta)\right)$ pourra être non monotone. Donc le sens de variation de

$E\left[\psi'\left(u(t)\right)-\lambda | t\geq\theta\right]$ est indéterminé.

Notons également $\psi'\left(u(t)\right)-\lambda$ sera nécessairement positif sur certains intervalles et négatif sur d'autres car $\lambda = E\left[\psi'\left(u(\theta)\right)\right]$

Donc il ne suffit pas d'imposer une condition sur le sens de variation de $\psi'\left(u(\theta)\right)$ pour s'assurer que $q(\theta)$ est croissante. Il faudrait deux conditions différentes. Selon que l'on se trouve sur un intervalle où $\psi'\left(u(\theta)\right) > \lambda$ ou sur un intervalle où $\psi'\left(u(\theta)\right) < \lambda$. Cela aurait peu de sens économique. Cette discussion montre que $\theta \mapsto \theta + \frac{1}{\lambda}\frac{\mu(\theta)}{f(\theta)}$ n'étant pas nécessairement croissante sur $[\underline{\theta},\overline{\theta}]$, la condition du second ordre $\dot{q}(\theta)$ doit être intégrée au programme $(\overline{P}_c)$ par soucis de rigueur.

Intégration de la contrainte $\dot{q}(\theta)\geq 0$ à $(\overline{P}_c)$

Afin de ne pas surcharger cette annexe, la démonstration sera ici présentée dans ses grandes lignes. Le lecteur intéressé se rapportera à profit à Laffont-Martimort (2002) qui en présentent toutes les étapes rigoureusement (confer annexe du Chapitre 3).

La méthode consiste à introduire une variable de contrôle $z(\theta)$ dans le programme $(\overline{P}_c)$ telle que $\dot{q}(\theta) = z(\theta)$ et $z(\theta)\geq 0$.

Deux cas sont possibles. Si $z(\theta) > 0$ sur un intervalle I, alors on peut montrer que les deux nouvelles contraintes sont non pertinentes. On obtient donc les solutions du programme $(\overline{P}_c)$ sans la contrainte $\dot{q}(\theta)\geq 0$.

Si $z(\theta) = 0$ sur $[\theta_1,\theta_2]$, alors on peut montrer[39] que :

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left[1+\theta-E(\theta)-\frac{1}{v'\left(q(\theta)\right)}+\frac{1}{\lambda}\left[\frac{\mu(\theta)}{f(\theta)}-E\left(\frac{\mu(\theta)}{f(\theta)}\right)\right]\right]dF(\theta)=0$$

où $\overline{q} = q^{PR}(\theta_1) = q^{PR}(\theta_2)$

Donc

$$\frac{1}{v'(\overline{q})}=\frac{\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left[1+\theta-E(\theta)+\frac{1}{\lambda}\left[\frac{\mu(\theta)}{f(\theta)}-E\left(\frac{\mu(\theta)}{f(\theta)}\right)\right]\right]dF(\theta)}{\int_{\theta_1}^{\theta_2}f(\theta)d\theta}$$

□

[39] Les résultats d'obtiennent assez facilement à partir des conditions du premier ordre et en utilisant les conditions de Kuhn et Turcker.

Remerciements

Je suis infiniment reconnaissant à l'endroit de mon directeur de mémoire, Stephane Gauthier. Sa disponibilité quotidienne, ses remarques précises et toujours déterminantes ont constitué un soutien inestimable. Je le remercie de m'avoir toujours poussé à aller plus loin lorsque je pensais avoir découvert quelque point déterminant qui à bien y regarder ne l'était pas. Ses vastes connaissances en économie publique ont maintes fois éclairé les voies que j'ai pu emprunter.

Je remercie également les professeurs du séminaire de microéconomie pour leur écoute et leurs conseils avisés. Je tenais à remercier particulièrement Messieurs Pierre Fleckinger et Philippe Gagnepain pour le regard extérieur et érudit qu'ils ont porté sur mon travail, m'aidant à dépasser le cadre restrictif qu'impose trop souvent l'étude d'un modèle précis. Merci à Madame Delphine Brochard pour ses précieux conseils.

Merci enfin à mes parents, à mes proches, à Agathe sans qui j'aurais eu beaucoup de peine à venir à bout de cette dissertation.

Références

Baron, D. P., & Myerson, R. B. [1982]. « Regulating a monopolist with unknown costs », *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 911-930.

Becker, G. [1974]. « A theory of social interactions », *Journal of Political Economy* 82, 1063-1093.

Becker, G. [1991]. « A Treatise on the Family », *Cambridge, Mass.: Harvard University Print*.

Besley T., Coate S. [2003], « Centralized versus decentralized provision of local public goods : political economy approach », *Journal of Public Economics* 87, 2611-2637.

Blundell, R., Chiappori, P. A., & Meghir, C. [2005]. « Collective labor supply with children », *Journal of Political Economy*, *113*(6), 1277-1306.

Diamond, P. A. [1998]. « Optimal income taxation: an example with a U-shaped pattern of optimal marginal tax rates », *American Economic Review*, *88*(1), 83-95.

Dutta B., Sen A. [1991], « A necessary and sufficient condition for two-person Nash-Implementation », *Review of Economic Studies* 58, 121-128.

Fehr E.,Schmidt K. [1999], « A theory of fairness, competition and cooperation », *Quarterly Journal of Economics* 114, 817-868.

Fehr E., Schmidt K. [2006], « The economics of fairness, reciprocity and altruism : experimental evidence and new theories », in S. Kolm, J.M. Ythier, eds., *Handbook of the Economics of Giving, Altruism and Reciprocity : Volume 1, Foundations* 615-691.

Greenwald, B. C., & Stiglitz, J. E. [1986]. « Externalities in economies with imperfect information and incomplete markets », *The quarterly journal of economics*, *101*(2), 229-264.

Jehiel P., Moldovanu B. [2001], « Efficient design with interdependent values », *Econometrica* 51, 1799-1819.

Jehiel P., Moldovanu B., Stacchetti E. [1999], « Multidimensional mechanism design for auctions with externalities », *Journal of Economic Theory* 85, 258-293.

Küçükşenel S. [2009], « Incentives and institutions : essays in mechanism design and game theory with applications », *Thèse, California Institute of Technology*.

Laffont J.-J., Martimort D. [2002], « Theory of incentives – The pricipal-agent model », *Princeton University Press.*

Mezzetti C. [2004], « Mechanism design with interdependent valuations : Efficiency », *Econometrica* 72, 1617-1626.

Mirrlees, J. A. [1971]. « An exploration in the theory of optimum income taxation » *The review of economic studies*, 175-208.

Moore J., Repullo R. [1990], « Nash implementation : A full characterisation », *Econometrica* 28, 1083-1099.

Oates W., [1972], « Fiscal federalism », Harcourt Brace, New-York.

Stiglitz, J. E. [1982]. « Self-selection and Pareto efficient taxation » *Journal of Public economics*, 17, 212-240.

Stiglitz, J. E. [2002]. « Information and the Change in the Paradigm in Economics » *American Economic Review*, 460-501.

Résumé du programme de recherche

➢ La prise en compte de l'altruisme dans les politiques publiques

Un nombre croissant de champs de la politique économique doivent et, de ce fait, tiennent compte de la présence d'externalités entre les agents. C'est à partir de ce constat, tant théorique que politique, qu'a débuté notre recherche. Deux principaux motifs expliquent la nécessité d'une prise en compte par les décideurs politiques de l'impact sur les choix d'un agent du comportement d'autres agents. Premièrement, certaines activités génèrent des nuisances sur autrui, à l'instar de la pollution. Il convient de les atténuer. D'autre part, afin d'être la plus efficace possible, une politique doit considérer tous les facteurs principaux affectant le choix des agents qu'elle vise. Elle doit notamment tenir compte des externalités le cas échéant. C'est ce second motif qui a guidé notre travail.

L'altruisme est une externalité déterminante pour nombre de politiques publiques. En effet, le gouvernement doit souvent tenir compte dans ses décisions du fait qu'outre la satisfaction directe qu'un individu tire d'une politique, il jouit également des bénéfices dont les autres agents profitent. Blundell, Chiappori et Meghir (2005) ont ainsi montré que lorsque le gouvernement doit choisir quel membre d'un ménage cibler en matière de prestations, par exemple, l'altruisme est un critère déterminant[1]. Notre recherche s'est, quant à elle, concentrée sur la fourniture publique de biens en présence de préférences altruistes. Il s'agit de savoir comment le gouvernement, compte tenu de ses objectifs redistributifs, doit allouer les biens au sein de la population et de quelle manière il lui faut répartir les coûts entre les agents.

Le cas du fédéralisme fiscal est une bonne illustration du problème étudié. Le modèle que nous avons proposé ne se cantonne certes pas à ce cas précis, mais le fédéralisme fiscal est certainement l'un des exemples pratiques où il s'applique le mieux. En général, l'hypothèse selon laquelle le gouvernement fournirait des quantités différentes de bien selon le niveau d'altruisme des agents peut à priori sembler peu pertinente. Mais l'exemple suivant montre que l'altruisme n'est pas un paramètre anodin. A la suite de Oates (1972), Besley et Coate (2003) proposent un modèle où deux villes appartenant à un même département se voient allouer un bien public. Le niveau de bien qu'elles reçoivent dépend de l'importance qu'elles accordent à l'autre ville. Plutôt qu'une interprétation en termes de pur altruisme, cette considération pour le sort des habitants de la ville voisine peut être interprétée ainsi : les habitants d'une ville, ne sachant pas parfaitement où ils résideront dans l'avenir, préfèrent que l'autre ville ne soit pas excessivement désavantagée. Ainsi, la prise en compte de cette mesure de la mobilité géographique permet au gouvernement d'anticiper les tendances démographiques à venir.

➢ Une modélisation généralisant le cadre de Besley et Coate (2003)

Afin de répondre à la question posée, nous nous sommes appuyés sur le modèle de Besley et Coate (2003). En vue d'étudier l'alternative entre centralisation et décentralisation selon une approche d'économie politique, les deux auteurs adoptent des spécifications et des hypothèses assez restrictives. Notre problème ne nécessitant pas de telles restrictions, nous adoptons une formalisation plus générale. Nous considérons une économie contenant un nombre fini d'agents[2] ayant des préférences altruistes. Le gouvernement fournit des quantités différentes d'un bien aux agents selon leur niveau d'altruisme. Afin d'assurer le financement de cette politique, il impose une taxe différentiée à chaque agent. L'une des différences notables avec le cadre initial est que nous supposons que le gouvernement a des préoccupations redistributives. Par là, nous entendons qu'il souhaite que les fruits de sa politique soient répartis le plus équitablement possible.

---

[1] Voir également Becker (1974,1991).

[2] Les agents ne sont plus nécessairement des villes.

L'altruisme est une information privée des agents. L'abandon de l'hypothèse d'observabilité par le gouvernement du niveau d'altruisme des agents est le principal apport analytique de notre travail. Dans la littérature antérieure, et notamment chez Besley et Coate (2003), le degré d'altruisme était considéré observable. Cette hypothèse est peu plausible car l'altruisme est pas nature une information privée. Dans le cas du fédéralisme fiscal, la mobilité géographique des habitants d'une ville paraît certes davantage observable. Mais dans ce cas également, il est à penser que les autorités d'une ville sont mieux informées sur les caractéristiques de leurs habitants que le gouvernement fédéral. Ainsi, un agent sera toujours susceptible de déclarer avoir un niveau d'altruisme différent du sien propre. Raison pour laquelle notre modèle se situe dans un contexte de sélection adverse.

L'altruisme considéré est à caractère relatif. Dans la majorité des travaux sur le sujet, l'altruisme est modélisé par un paramètre de pondération de l'utilité d'autrui dans l'utilité individuelle. Besley et Coate (2003) s'inscrivent dans cette tradition. Toutefois l'altruisme qu'il considère est à caractère relatif. C'est-à-dire qu'un accroissement de ce paramètre a deux effets : il augmente l'intérêt pour autrui mais diminue en même temps l'importance que l'agent considéré accorde à sa propre personne. C'est cette conception, assez répandue, de l'altruisme que nous avons également adopté. Elle présente l'avantage de comprendre non seulement l'intérêt pour autrui mais aussi le goût pour le bien fourni. Néanmoins notre étude montre qu'elle modifie les résultats usuels[3] du cadre de sélection adverse.

- Arbitrage équité-efficacité et règle de provision optimale

Lorsque le gouvernement observe les niveaux d'altruisme, il est à même de concilier ses objectifs d'équité et d'efficacité. Ce premier résultat obtenu signifie que le menu de contrats (quantités fournies, taxes) permet à la fois que tous les agents obtiennent la même utilité (objectif d'équité) et que le surplus agrégé de ces derniers soit maximal (objectif d'efficacité). Nous retrouvons là un résultat d'économie publique assez répandu. Il est intéressant de noter que la présence d'une externalité dans les préférences des agents ne l'altère pas. Un résultat moins habituel toutefois est obtenu lorsque le gouvernement n'observe pas les niveaux d'altruisme. Lorsque l'économie ne comprend que deux niveaux distinct d'altruisme, le gouvernement peut également concilier équité et efficacité au second rang. Cette propriété résulte de la présence de l'externalité, et plus précisément du caractère relatif de la notion d'altruisme étudiée. En pratique, cela signifie que lorsqu'une autorité fait face à une population dont les niveaux d'altruisme sont polarisés autour de deux valeurs distinctes, la situation idéale de premier rang peut être atteinte.

L'asymétrie d'information contraint le gouvernement à un arbitrage entre équité et efficacité, lorsqu'il y a plus de trois niveaux d'altruisme. Notre analyse montre en effet que lorsque le gouvernement propose le menu de contrats de premier rang sans être en capacité d'observer le degré d'altruisme des agents, ceux-ci font de fausses déclarations. Plus précisément, nous montrons que les agents fortement ou faiblement altruistes ont intérêt à annoncer des niveaux d'altruisme intermédiaire. Ce schéma de déviations assez original provient, lui aussi, du caractère relatif de l'altruisme. Afin d'éviter ces fausses déclarations, le gouvernement doit avantager les agents imitateurs en renonçant soit à l'équité soit à l'efficacité de premier rang. Nous avons montré dans notre étude que le choix optimal consiste en un arbitrage entre ces deux formes de renoncement.

Afin d'orienter le gouvernement dans ses choix politiques, une règle de provision optimale explicite doit être formulée. Cette règle est le dernier résultat sur lequel s'achève notre mémoire. Dans une économie réelle, il y a une infinité de degrés d'altruisme possibles. La règle trouvée permet, quelle que soit la distribution des niveaux d'altruisme au sein de la population, de savoir précisément quelle quantité un agent donné doit recevoir selon son degré d'altruisme. Cette règle tient compte de trois préoccupations du gouvernement : la redistribution, l'efficacité et l'incitation des agents à révéler leur vrai type. Elle

[3] Voir Baron-Myerson (1982) ou Stiglitz (1982) pour le cadre traditionnel de sélection adverse.

est une voie ouverte sur une application empirique de notre modèle. Pour une économie donnée, elle permettrait à la fois de savoir si les choix politiques passés ont été pertinent et d'effectuer des recommandations quant aux choix à venir.

- Contribution théorique de l'étude

Le principal apport théorique de notre travail est l'adaptation du cadre de sélection adverse à la présence d'une externalité à caractère relatif. Dans des sociétés et économies où les interactions entre les divers agents sont de plus en plus nombreuses, ces derniers effectuent leurs choix non seulement en tenant compte des autres agents (externalités classiques), mais aussi en considérant leur situation relativement à celle d'autrui (externalités relatives). En présence d'asymétries d'information, notre modèle montre que les mécanismes et résultats habituels ne s'appliquent plus nécessairement. Cela doit être pris en compte par les pouvoirs publics dans leurs choix de politique économique. La règle de provision que nous avons formulée illustre de quelle manière ces choix doivent être opérés en ce qui concerne la fourniture publique de biens. Mais quantités d'autres champs pourraient être concernés.

De multiples voies d'approfondissement peuvent être envisagées. D'un point de vue théorique, il serait par exemple intéressant de modéliser l'altruisme relatif de manière plus générale. Nous avons en effet adopté la formalisation habituelle des préférences des agents en considérant une fonction d'utilité quasi-linéaire. Des résultats plus généraux seraient obtenus en levant cette hypothèse. Des développements empiriques pourraient également être réalisés. Il serait, par exemple, possible dans une collectivité et pour une politique de fourniture de bien public données de comparer celle-ci à la règle de provision théorique trouvée. Il faudrait néanmoins pour cela disposer de statistiques concernant la mobilité géographique des habitants.